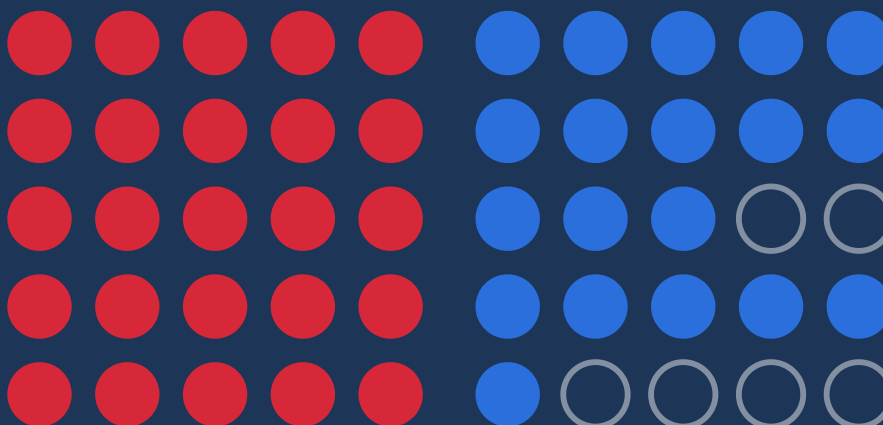




ERSTE-HILFE-MATHEMATIK

Vom Zählen zum Rechnen

Grundvorstellungen aufbauen – Rechenschwierigkeiten
wirksam begegnen. Ein Buch für Eltern, Lehrkräfte und alle
Interessierten



Roland Dauth

erste-hilfe-mathematik.de

Vom Zählen zum Rechnen

Grundvorstellungen aufbauen – Rechenschwierigkeiten wirksam begegnen.
Ein Buch für Eltern, Lehrerinnen und Lehrer und alle, die Kindern beim Rechnenlernen helfen.

© 2026 Roland Dauth
erste-hilfe-mathematik.de

Stand: Oktober 2026

Alle in diesem Buch genannten EHM-Lernapps sind kostenlos über erste-hilfe-mathematik.de nutzbar. Die Grafiken wurden eigens für dieses Buch gestaltet.

Hinweis zu den Quellen: Belege stehen als Kurzangabe (Autor Jahr) direkt im Text; die vollständigen Angaben finden sich im Literaturverzeichnis am Ende des Buches.

Inhalt

Vorwort	5
---------	---

TEIL I · DAS PROBLEM VERSTEHEN

1	Ein vermeidbares Problem	7
2	Das Kernsymptom und Kernproblem: Zählen statt Rechnen	11
3	„Dyskalkulie“ – ein Begriff, der mehr verdeckt als erklärt	16
4	Grundvorstellungen: das Fundament des Rechnens	20

TEIL II · ARBEITSMITTEL: WENIGER, ABER BESSER

5	Was ein gutes Arbeitsmittel ausmacht	25
6	Das strukturierte Punktefeld	28
7	Warum gerade die Fünf?	34
8	Das Dienes-Material auf dem Prüfstand	41
9	Weitere Materialien im Check	49

TEIL III · FÖRDERPRAXIS

10	Mengen auf einen Blick erfassen	53
11	Zahlen zerlegen und zusammensetzen	56
12	Das Stellenwertsystem verstehen	60
13	Erst verstehen, dann üben	63

TEIL IV · DIAGNOSTIK

14	Was Rechentests leisten – und was nicht	66
----	---	----

TEIL V · DIGITALE MEDIEN

15	Mathe-Apps: Spielzeug oder Werkzeug?	71
----	--------------------------------------	----

TEIL VI · GEMEINSAM HANDELN

16	Eltern und Schule an einem Strang	77
	Zum Schluss	81

TEIL VII · ANHANG

A	Beobachtungsbogen „Zählt das Kind noch?“	82
B	Die EHM-Apps im Überblick	84
C	Literatur	86

Vorwort

Dreißig Jahre lang habe ich als Seminarrektor junge Lehrerinnen und Lehrer für die Grundschule ausgebildet, zuerst in Wunsiedel, dann in Bayreuth. Davor war ich selbst Klassenleiter an Grund- und Hauptschulen in Ober- und Unterfranken. In Oberfranken habe ich einige Jahre das bundesweite Programm „SINUS an Grundschulen“ mitverantwortet, das den Mathematikunterricht verbessern sollte. Bei unseren Fortbildungen an der Universität Bayreuth, mit oft weit über hundert Lehrkräften, ging es immer wieder um eine Frage: Wie kann man Rechenproblemen vorbeugen, und wie hilft man Kindern, die sie schon haben?

Eine Beobachtung hat mich dabei nie losgelassen. Viel zu viele Kinder finden keinen tragfähigen Zugang zur Mathematik. Sie leiden in der Schule darunter, und viele tragen diese Erfahrung ein Leben lang mit sich. Dabei sind sie in aller Regel nicht weniger begabt als andere.

Seit meinem Ruhestand fördere ich selbst Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen. Mit über siebzig Kindern habe ich die Ideen erprobt, die in diesem Buch stehen. Den allermeisten konnte nachhaltig geholfen werden. Und fast alle hatten zu Beginn dasselbe Problem: Sie **zählten**, statt zu **rechnen**.

Aus diesen Erfahrungen ist zunächst die Website *erste-hilfe-mathematik.de* entstanden, mit Erklärungen, Fördermaterial und eigenen, kostenlosen Lernapps. Dann kam eine kleine Broschüre dazu. Dieses Buch geht einen Schritt weiter. Es bündelt die Inhalte der Website und der Broschüre, verbindet sie mit dem, was die mathematikdidaktische Forschung heute weiß, und vertieft drei Themen, die mir besonders am Herzen liegen:

- warum **strukturierte Punktefelder** das sinnvollste Arbeitsmittel im Anfangsunterricht sind – und warum das weit verbreitete **Dienes-Material** dafür weniger geeignet ist, als viele glauben,
- warum **Rechentests** für die tägliche Förderarbeit erstaunlich wenig verraten,

- und warum viele **Mathe-Apps** wenig bringen, während auch gute Apps nur dann helfen, wenn man weiß, was mit ihnen erreicht werden soll.

Das Buch richtet sich an Eltern, an Lehrerinnen und Lehrer und an alle, die beruflich oder privat Kindern beim Rechnenlernen helfen. Ich habe versucht, so zu schreiben, dass man kein Studium der Mathematikdidaktik braucht, um es zu verstehen. Wer tiefer einsteigen möchte – etwa in Seminar, Studium oder Fortbildung – findet die Quellen als Kurzbeleg direkt im Text und vollständig im Literaturverzeichnis.

Wie dieses Buch aufgebaut ist

Teil I beschreibt das Problem: Was zählendes Rechnen ist, warum es eine Sackgasse ist und weshalb der Begriff „Dyskalkulie“ oft mehr verdeckt als erklärt. **Teil II** widmet sich den Arbeitsmitteln und begründet, warum weniger und besser strukturiertes Material mehr hilft. **Teil III** ist der Praxisteil: Wie man Mengenvorstellung, Zahlzerlegungen und Stellenwertverständnis aufbaut und wann das Üben sinnvoll wird. **Teil IV** fragt, was Diagnostik leisten muss, **Teil V**, was digitale Medien leisten können. **Teil VI** schließlich richtet sich an Eltern und Schulen gemeinsam.

Im Text finden Sie farbig abgesetzte Kästen: „**Für zu Hause und im Unterricht**“ (gelb) mit konkreten Übungen und Spielen, „**Vertiefung**“ (blau) mit fachlichem Hintergrund und Forschungsergebnissen und „**Aus der Förderpraxis**“ (grün) mit Beobachtungen aus meiner eigenen Arbeit mit Kindern.

Mein Wunsch ist, dass dieses Buch Mut macht. Die wichtigsten Hilfen für Kinder mit Rechenschwierigkeiten sind kein Hexenwerk. Sie kosten vor allem Zeit, Geduld und das richtige Material – aber kein Geld.

Roland Dauth, im Herbst 2026

Das Problem verstehen

Warum so viele Kinder beim Rechnenlernen den Anschluss verlieren – und warum das in den allermeisten Fällen kein unabänderliches Schicksal ist.



Ein vermeidbares Problem

Mathematik in Deutschland – und was die Zahlen verschweigen

Am 8. September 2026 wurden die Ergebnisse der PISA-Studie 2025 veröffentlicht – und sie sind ein Desaster. Die Fünfzehnjährigen in Deutschland erreichten in Mathematik nur noch durchschnittlich **464 Punkte**. 2022 waren es 475, 2012 noch 514 Punkte (Lewalter et al. 2023). In nur dreizehn Jahren ist das mittlere Leistungsniveau damit um volle 50 Punkte abgestürzt. In allen drei getesteten Bereichen – Mathematik, Lesen und Naturwissenschaften – liegt Deutschland auf dem **niedrigsten Stand seit Beginn der PISA-Erhebungen**, sogar unter dem Niveau des ersten „PISA-Schocks“ vor 25 Jahren. Rund **ein Drittel** der Jugendlichen verfügt in Mathematik nicht mehr über die nötigen Basiskompetenzen. Die Bundesbildungsministerin nannte die Ergebnisse „für Deutschland dramatisch“ (BMBFSFJ 2026; OECD 2026).

Man muss es deutlich sagen: Das ist keine Delle mehr, das ist eine **Bildungskatastrophe**. Der Begriff ist nicht neu – der Philosoph Georg Picht hat ihn schon 1964 geprägt, um vor dem Zurückfallen des deutschen Bildungswesens zu warnen (Picht 1964). Sechzig Jahre später trifft er

wieder zu, und diesmal geht es nicht um zu wenige Abiturienten, sondern um etwas viel Grundlegenderes: um Jugendliche, die am Ende ihrer Pflichtschulzeit nicht sicher rechnen können.

Die anderen großen Studien zeichnen dasselbe Bild. Im IQB-Bildungstrend 2024 verfehlte rund ein Drittel der Neuntklässlerinnen und Neuntklässler den Mindeststandard für den Mittleren Schulabschluss in Mathematik – deutlich mehr als 2018 und 2012 (Stanat et al. 2025). Und das Problem beginnt nicht in der Sekundarstufe: Schon im IQB-Bildungstrend 2021 verfehlten rund 22 Prozent der Viertklässlerinnen und Viertklässler die Mindeststandards in Mathematik (Stanat et al. 2022). Etwa jedes fünfte Kind verlässt also bereits die Grundschule mit erheblichen Lücken in den Grundlagen – und diese Lücken wachsen danach weiter.

PISA 2025: Mathematik **464 Punkte** – so schlecht wie nie. Rund **einem Drittel** der Fünfzehnjährigen fehlen die mathematischen Basiskompetenzen. Die Wurzeln liegen oft schon in der **ersten Klasse**.

Für diese Entwicklung gibt es viele Gründe: Lehrkräftemangel und Unterrichtsausfall, eine zunehmend vielfältige Schülerschaft mit sehr unterschiedlichen sprachlichen und sozialen Voraussetzungen, die Folgen der Pandemie. Keine einzelne Unterrichtsmethode und kein einzelnes Material hat den Rückgang „verursacht“, und dieses Buch behauptet das auch nicht. Aber es lohnt sich, eine unbequeme Frage zu stellen: Was geschieht eigentlich im Kopf eines Kindes, wenn es rechnen lernt – und was geschieht, wenn dabei etwas schiefgeht?

Kleine Lücken, große Folgen

Mathematik ist wie kaum ein anderes Fach hierarchisch aufgebaut. Fast alles Neue baut auf etwas Altem auf. Wer nie verstanden hat, was bei der Zahl 234 die 2, die 3 und die 4 bedeuten, wird später auch bei 4,35 nicht wissen, warum die 3 mehr wert ist als die 5. Wer beim Zehnerübergang

noch zählen muss, verliert beim schriftlichen Rechnen den Überblick. Und wer das Einmaleins nur als Reihen auswendig gelernt hat, steht bei der Division und den Brüchen ohne Werkzeug da.

Fehlende Mengenvorstellung → zählendes Rechnen →
unsichere Zerlegungen → schwaches
Stellenwertverständnis → Rechenverfahren als
unverstandene Regeln → Probleme bei Einmaleins,
Division, Brüchen, Prozentsen und Algebra.

Diese Kette ist kein Naturgesetz, aber sie beschreibt sehr genau, was ich bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten immer wieder beobachte. Die Schwierigkeiten eines Fünftklässlers mit Brüchen haben ihre Wurzeln häufig in der ersten Klasse.

Wie viele Kinder sind betroffen?

Die Antwort hängt davon ab, wo man die Grenze zieht. Häufig wird von 15 bis 20 Prozent der Kinder gesprochen, die in Mathematik deutliche Probleme haben, und von 3 bis 8 Prozent mit so großen Schwierigkeiten, dass von Rechenschwäche, Rechenstörung oder Dyskalkulie die Rede ist. Solche Zahlen sind allerdings mit Vorsicht zu lesen: Sie hängen unmittelbar davon ab, welcher Test verwendet und bei welchem Prozentrang die Grenze gezogen wird (Gaidoschik et al. 2021). Bei rund drei Millionen Grundschulkindern in Deutschland geht es in jedem Fall um sehr viele Kinder – nach grober Rechnung um mehrere Kinder in jeder Klasse.

Hinzu kommt eine hohe Dunkelziffer bei Erwachsenen. Rechenschwierigkeiten lassen sich im Alltag leichter verstecken als Leseschwierigkeiten. Viele Betroffene meiden einfach alles, was mit Zahlen zu tun hat, und verzichten damit auf berufliche Möglichkeiten, die heute fast immer eine solide mathematische Grundbildung voraussetzen.

Die gute Nachricht

Die mathematikdidaktische Forschung ist sich in einem Punkt bemerkenswert einig: Der Unterricht der ersten beiden Schuljahre hat ein großes Potenzial, Schwierigkeiten vorzubeugen (Gaidoschik et al. 2021). Und auch dort, wo Schwierigkeiten bereits bestehen, wirkt Förderung – vorausgesetzt, sie setzt an den richtigen Inhalten an. Die medizinische Leitlinie zur Rechenstörung hält ausdrücklich fest, dass die Förderung an den mathematischen Problemschwerpunkten des Kindes ansetzen soll; solche inhaltspezifischen Maßnahmen zeigen in der Forschung deutliche Wirkungen (DGKJP 2018).

Nach meiner eigenen Erfahrung kann einer großen Mehrheit der betroffenen Kinder – ich schätze, rund neun von zehn – spürbar und nachhaltig geholfen werden. Diese Einschätzung teilen viele Fachleute, auch wenn sich eine solche Zahl naturgemäß schwer exakt belegen lässt.

Worum es in diesem Buch geht

Der Kern ist schnell benannt. Kinder mit Rechenschwierigkeiten haben von den wichtigsten Dingen des Anfangsunterrichts zu wenig mitbekommen. Ihnen fehlen drei **Grundvorstellungen**, ohne die Rechnen auf Dauer nicht funktioniert:

1. eine **Mengenvorstellung** – Anzahlen strukturiert und zunehmend „mit einem Blick“ erfassen, statt sie abzuzählen,
2. ein Verständnis für **Zahlzerlegungen** als wesentliche Grundlage für das **Operationsverständnis** – Zahlen lassen sich in andere Zahlen zerlegen und aus ihnen zusammensetzen,
3. ein **Stellenwertverständnis** – mit nur zehn Ziffern lässt sich jede Zahl schreiben, weil die Stelle einer Ziffer ihren Wert bestimmt.

Ohne diese Grundvorstellungen bleibt dem Kind nur ein Werkzeug: das Zählen. Und genau damit beginnt das eigentliche Problem.

2

Das Kernsymptom und Kernproblem: Zählen statt Rechnen

Warum eine anfangs erfolgreiche Strategie zur Sackgasse wird

Fast alle Kinder zählen, wenn sie in die Schule kommen. Sie zählen Gegenstände ab, sie zählen an den Fingern, sie zählen weiter. Das ist normal und sogar eine wichtige Leistung. Zählen ist der erste Zugang zur Welt der Zahlen. Zum Problem wird es erst, wenn ein Kind **dabei stehen bleibt** – wenn es am Ende der ersten Klasse und darüber hinaus nahezu jede Aufgabe zählend löst.

Vom Alleszählen zum Rechnen

Die Forschung beschreibt eine typische Entwicklung, die Kinder bei Additionsaufgaben wie $4 + 3$ durchlaufen (Carpenter & Moser 1984; Gaidoschik 2010):

- **Alles zählen:** Das Kind zählt vier Finger ab, dann drei Finger, dann alle zusammen: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.“
- **Weiterzählen:** Das Kind beginnt bei 4 und zählt drei weiter: „5, 6, 7.“ Geschickte Kinder beginnen beim größeren Summanden.
- **Ableiten:** Das Kind nutzt eine bekannte Aufgabe: „ $3 + 3$ sind 6, also ist $4 + 3$ eins mehr: 7.“
- **Faktenabruf:** Das Kind weiß das Ergebnis einfach.

Das Ziel des ersten Schuljahres ist, dass Kinder im Zahlenraum bis zehn weitgehend auf die beiden letzten Stufen kommen (Gaidoschik 2010). Ableiten ist dabei kein Umweg, sondern der eigentliche Motor: Aufgaben, die ein Kind ableiten kann, weiß es bald auswendig.

Was eine große Studie zeigt

Wie groß das Problem ist, hat Michael Gaidoschik in einer aufwendigen Studie untersucht. Er begleitete 139 Kinder aus 22 zufällig ausgewählten Klassen in Niederösterreich durch das erste Schuljahr und befragte sie dreimal in Einzelinterviews. Am Ende des Schuljahres löste nur etwa ein Drittel der Kinder die Grundaufgaben überwiegend durch Faktenabruf und Ableiten. Rund 27 Prozent rechneten noch **überwiegend zählend** (Gaidoschik 2010). Zum Vergleich: Chinesische Kinder lösten am Ende des ersten Schuljahres 91 Prozent der Grundaufgaben bis 20 durch Faktenabruf (Geary et al. 1996).

Bemerkenswert ist ein weiterer Befund: Kinder, die zu Schulbeginn kleine Mengen gut **quasi-simultan** erfassen konnten – also strukturiert, ohne Einzelzählen –, waren am Schuljahresende deutlich häufiger erfolgreich (Gaidoschik 2010). Genau hier setzt das erste Kapitel der Förderpraxis in diesem Buch an.

VERTIEFUNG: HAT DER UNTERRICHT EINEN ANTEIL?

Gaidoschik fand in den Schulbüchern und im Unterricht der untersuchten Klassen kaum gezielte Förderung von Ableitungsstrategien. Er vermutet deshalb einen erheblichen Einfluss des Unterrichts, betont aber selbst, dass seine Studie nicht als statistischer Nachweis von Unterrichtseffekten angelegt war (Gaidoschik 2010). Ähnlich nennen Höveler et al. (2022) als mögliche Ursachen verfestigten Zählens, dass Mathematik als Regelwerk erlebt wird, dass schnelle Zählerfolge das Vorgehen bestärken und dass Anschauungsmittel ungünstig eingesetzt werden. Im Fachdiskurs spricht man von einer möglichen „didaktogenen“ – also durch Unterricht mitverursachten – Komponente.

Warum Zählen eine Sackgasse ist

Mit genauem Zählen kommt man ja auch zum richtigen Ergebnis. Warum also die Sorge? Ich vergleiche es gern mit dem Krabbeln. Wer krabbelt, kommt vorwärts, sogar recht sicher – er kann nicht einmal hinfallen. Aber es ist viel anstrengender als Laufen, man kommt nicht weit, und es ist auf Dauer frustrierend, wenn alle anderen längst laufen.

Konkret hat das zählende Rechnen mehrere Nachteile:

- **Es funktioniert nur im kleinen Zahlenraum.** Bis 20 fällt es kaum auf. Bei $47 + 38$ oder $63 - 29$ bricht es zusammen.
- **Es ist fehleranfällig.** Typisch sind Ergebnisse, die um genau eins danebenliegen, weil das Startglied mitgezählt oder vergessen wird.
- **Es verbraucht das Arbeitsgedächtnis.** Wer beim Zählen die Schritte mitverfolgen muss, hat keinen Kopf mehr frei für den eigentlichen Rechenweg.
- **Es verhindert, dass Zahlbeziehungen sichtbar werden.** Ein Kind, das $8 + 7$ durch Weiterzählen löst, erfährt nichts darüber, dass $8 + 2 = 10$ ist oder dass $7 + 7 = 14$ nur eins weniger ist. Es kann deshalb auch nichts ableiten.
- **Es stützt eine ordinale Zahlvorstellung.** Die 7 ist für zählende Kinder vor allem „die Siebte“ in einer Reihe – ein Platz, keine Menge.

Kurz: Zählende Kinder lernen aus ihren Rechnungen nichts dazu. Jede Aufgabe beginnt von vorn. Die „Lernkarawane“ im Klassenzimmer zieht weiter, und das Kind wird Schritt für Schritt abgehängt.

Zwei Kinder, eine Aufgabe

Die folgende Situation ist typisch. Zwei Kinder lösen die Aufgabe $8 + 7$. Beide kommen auf 15.

Kind A zählt	Kind B rechnet
„Neun, zehn, elf, zwölf, dreizehn, vierzehn, fünfzehn.“ – sieben Finger werden nacheinander ausgestreckt.	„Acht plus zwei sind zehn, dann noch fünf – fünfzehn.“
Das Kind bleibt an der Zahlwortreihe hängen.	Das Kind nutzt Beziehungen zwischen Zahlen.

Beide Ergebnisse sind richtig. Der Denkweg ist es nicht. Ein Arbeitsblatt, eine Probe oder ein Test, der nur das Ergebnis prüft, kann die beiden Kinder nicht unterscheiden. Die entscheidende Frage lautet deshalb nicht

nur „Kann das Kind die Aufgabe lösen?“, sondern: **„Was geschieht dabei im Kopf des Kindes?“** Auf diese Frage kommen wir im Kapitel über Diagnostik ausführlich zurück.

Woran man zählendes Rechnen erkennt

TYPISCHE ANZEICHEN

- Das Kind benutzt bei fast jeder Aufgabe die Finger – offen oder versteckt unter dem Tisch.
- Es zählt auch kleine, übersichtliche Mengen einzeln ab.
- Gerade gelöste Aufgaben werden kurz darauf erneut ausgezählt.
- Ergebnisse liegen häufig um genau eins daneben.
- Bei größeren Zahlen wird das Rechnen auffällig langsam.
- Das Kind kann nicht erklären, wie es gerechnet hat, oder sagt: „Ich hab's halt gezählt.“
- Lippen oder Kopf bewegen sich rhythmisch mit.

Höveler et al. (2022) nennen ganz ähnliche Merkmale: Zählen in Einerschritten, häufige Fehler im Zahlenraum über 20, viel Zeitbedarf, verstecktes Fingerzählen, Schwierigkeiten, Lösungswege zu beschreiben, und eine überwiegend ordinale Zahlvorstellung.

Wann sollte man handeln?

Dass Kinder in den ersten Schulmonaten viel zählen, ist kein Grund zur Sorge. Spätestens nach Weihnachten oder zum Halbjahr der ersten Klasse sollten Eltern und Lehrkraft aber gemeinsam hinsehen, wenn ein Kind auffällig an diesem Vorgehen festhält. Spätestens am Ende der ersten Klasse ist es höchste Zeit für gezielte Hilfe. Der sprichwörtliche Knoten platzt in Mathematik leider fast nie von selbst – im Gegenteil: Je länger ein Kind zählt, desto mehr verfestigt sich diese Strategie.

AUS DER FÖRDERPRAXIS

Viele Kinder, die zu mir kommen, haben bereits gelernt, ihr Zählen zu verbergen. Sie tippen mit den Fingern auf den Oberschenkel, bewegen die Zehen im Schuh oder nicken unmerklich im Takt. Sie wissen genau, dass Zählen „nicht erwünscht“ ist – aber sie haben keine Alternative. Ein Verbot hilft hier nicht. Das Kind braucht etwas, das an die Stelle des Zählens treten kann: Vorstellungen von Mengen, Zerlegungen und Stellenwerten.

„Dyskalkulie“ – ein Begriff, der mehr verdeckt als erklärt

Diagnose, Etikett und was Kindern wirklich hilft

Wenn ein Kind große Schwierigkeiten beim Rechnen hat, fällt früher oder später das Wort „Dyskalkulie“. Für viele Eltern ist das zunächst eine Erleichterung: Das Problem hat einen Namen, das Kind ist nicht „faul“ oder „dumm“. Trotzdem halte ich den Begriff für problematisch – und ich bin mit dieser Einschätzung nicht allein.

Was der Begriff medizinisch bedeutet

In den medizinischen Klassifikationssystemen wird die Rechenstörung als Entwicklungsstörung schulischer Fertigkeiten beschrieben, in der ICD-11 als „Entwicklungsbedingte Lernstörung mit Beeinträchtigung in Mathematik“. In Deutschland regelt eine medizinische S3-Leitlinie, wie eine solche Diagnose gestellt wird (DGKJP 2018). Kernstück ist ein normierter Rechentest: Liegt die Leistung eines Kindes deutlich unter der seiner Alters- oder Klassenstufe – in der Regel bei einem Prozentrang von höchstens 7 –, kann eine Rechenstörung diagnostiziert werden. Das früher übliche Kriterium, dass die Rechenleistung deutlich hinter der Intelligenz zurückbleiben müsse, empfiehlt die Leitlinie ausdrücklich nicht mehr (DGKJP 2018).

Die Diagnose kann für Familien wichtig sein: Sie öffnet in manchen Bundesländern den Weg zu Nachteilsausgleich oder zu Förderleistungen der Jugendhilfe. Diese praktischen Folgen sollte man nicht kleinreden.

Warum der Begriff trotzdem in die Irre führt

Das Problem liegt in dem, was der Begriff nahelegt. „Dyskalkulie“ klingt nach einer Krankheit, nach einer festen Eigenschaft des Kindes – nach „mit dem Kind stimmt etwas nicht“. Das hat Folgen:

- **Das Problem wird beim Kind abgeladen.** Wenn eine „Störung“ vorliegt, scheinen Eltern und Schule wenig ausrichten zu können. Alle anderen Beteiligten sind gewissermaßen „fein raus“.
- **Es entsteht der Eindruck eines einheitlichen Störungsbildes.** In Wirklichkeit sind die Schwierigkeiten von Kind zu Kind sehr verschieden – auch wenn sich, wie wir gesehen haben, bestimmte Muster wie das verfestigte Zählen auffallend oft wiederholen.
- **Die Grenze ist willkürlich.** Ob ein Kind mit Prozentrang 7 „Dyskalkulie hat“ und eines mit Prozentrang 9 nicht, entscheidet eine statistische Festlegung, keine inhaltliche.

Eine Gruppe führender Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker hat deshalb 2021 in einem gemeinsamen Positionspapier bewusst auf die Begriffe Rechenschwäche, Rechenstörung und Dyskalkulie verzichtet. Sie sprechen stattdessen von **„besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“**. Diese seien fachspezifisch, mit einer individuellen Lerngeschichte verbunden und in ihrer Ausprägung sehr unterschiedlich (Gaidoschik et al. 2021). Auch Wissenschaftler wie Sebastian Wartha oder Volker Ulm betonen seit Langem, dass es sich in aller Regel nicht um eine Krankheit handelt, sondern um fehlende mathematische Grundlagen, die man gezielt aufbauen kann.

Nicht das Kind ist das Problem. Sein Verständnis von Zahlen hat am Anfang des Mathematiklernens **nicht den nötigen Aufbau** bekommen – und dieser Aufbau lässt sich nachholen.

In diesem Buch verwende ich deshalb meist die Formulierung „Rechenschwierigkeiten“ oder „besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen“. Wo von „Rechenschwäche“ die Rede ist, ist dasselbe

gemeint – ohne medizinischen Unterton.

Was wirklich hilft – und was nicht

Hier sind sich Medizin und Mathematikdidaktik einig. Die S3-Leitlinie empfiehlt mit dem höchsten Empfehlungsgrad, dass die Förderung an den mathematischen Problemschwerpunkten des Kindes ansetzen soll. In den ausgewerteten Studien zeigten solche inhaltspezifischen Maßnahmen deutliche Effekte gegenüber unspezifischen Maßnahmen oder gar keiner Förderung (DGKJP 2018). Das didaktische Positionspapier fordert ebenso, die Förderung am arithmetischen Basisstoff anzusetzen: Zahlverständnis, Stellenwertsystem, Operationsverständnis und Ablösung vom zählenden Rechnen (Gaidoschik et al. 2021).

VORSICHT, GRAUER NACHHILFEMARKT

Was mich in all den Jahren am meisten geärgert hat, ist ein Teil des freien Nachhilfemarkts. Gegen oft teure Bezahlung werden dort Dinge angeboten wie „Lerntypbestimmung“, Koordinationsübungen, Wahrnehmungs- oder Konzentrationstrainings, Entspannungstechniken oder kinesiologische Übungen. Nichts davon ist schädlich, manches mag dem Kind sogar guttun. Aber bei Rechenproblemen hilft es nicht, weil es am eigentlichen Problem vorbeigeht. Fragen Sie bei jedem Angebot:

Arbeitet es mit Zahlen, Mengen und Rechenwegen – oder mit etwas anderem?

Ebenso kritisch sieht das Positionspapier Förderansätze, die den Stoff in kleinste Schritte zerlegen, Regeln ohne Verständnis einüben oder einfach mehr vom Gleichen wiederholen lassen. Automatisieren soll erst nach dem Verstehen kommen. Auch Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Zeitzuschläge können im Einzelfall sinnvoll sein, lösen aber das zugrunde liegende Problem nicht (Gaidoschik et al. 2021).

Zeit als unterschätzter Faktor

Menschen lernen unterschiedlich schnell – das ist eine Binsenweisheit, aber eine folgenreiche. In den ersten sechs Lebensjahren lernen Kinder Laufen, Sprechen, Fahrradfahren und vieles mehr. Niemand würde ein Kind für

„gestört“ halten, weil es zwei Monate später läuft als das Nachbarkind. In der Schule dagegen gibt der Lehrplan ein Tempo vor, und wer ihm nicht folgen kann, gerät ins Hintertreffen. Hätten Kinder mit Rechenschwierigkeiten die individuell nötige Zeit und dazu eine gute Lernbegleitung, würden sehr viel mehr von ihnen ihre Probleme hinter sich lassen.

4

Grundvorstellungen: das Fundament des Rechnens

Was im Kopf entstehen muss – und wie es dorthin kommt

Rechnen ist nicht dasselbe wie Mathematik verstehen. Ein Kind kann gelernt haben, wie man eine Aufgabe löst, ohne eine tragfähige Vorstellung davon zu haben, warum das Verfahren funktioniert. Viele Eltern kennen die Situation: Gestern konnte das Kind die Aufgaben noch, heute steht es bei einer leicht veränderten Aufgabe ratlos da und fragt: „Wie muss ich das rechnen?“

Was Grundvorstellungen sind

In der Mathematikdidaktik spricht man von **Grundvorstellungen** (vom Hofe 1995). Gemeint sind die inneren Bilder und Modelle, die einem mathematischen Begriff Bedeutung geben. Eine Grundvorstellung zur Zahl 7 ist zum Beispiel, dass sie eine Anzahl beschreibt – „so viele“ –, dass sie aus 5 und 2 oder aus 3 und 4 besteht und dass sie drei weniger als 10 ist. Eine Grundvorstellung zur Subtraktion ist, dass man etwas wegnimmt oder einen Unterschied bestimmt.

Für den Anfangsunterricht sind drei Grundvorstellungen entscheidend. Sie tragen alles, was danach kommt:

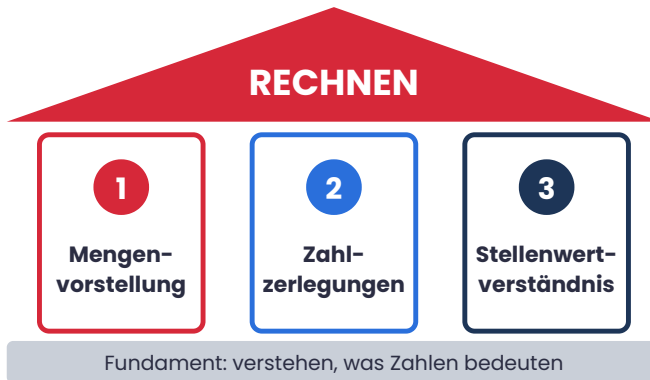


Abb. 1 Das Haus des Rechnens: drei Grundvorstellungen als tragende Säulen

Mengenvorstellung. Das Kind versteht, dass eine Zahl angibt, *wie viele* etwas sind, und kann Anzahlen strukturiert erfassen, statt sie einzeln abzuzählen. Krajewski beschreibt in ihrem Entwicklungsmodell, wie Kinder Zahlwörter schrittweise mit Mengen verknüpfen; diese Verknüpfung gilt als einer der wichtigsten Vorläufer späterer Mathematikleistungen (Krajewski & Schneider 2009).

Zahlzerlegungen. Das Kind weiß, dass Zahlen aus anderen Zahlen bestehen: Die 7 ist 5 und 2, aber auch 4 und 3. In der Fachsprache spricht man vom **Teil-Ganzen-Verständnis** (Resnick 1983). Es ist die Grundlage dafür, Aufgaben nicht zählend, sondern über Beziehungen zu lösen.

Stellenwertverständnis. Das Kind versteht, dass immer zehn Einer zu einem Zehner gebündelt werden (Bündelungsprinzip) und dass der Wert einer Ziffer von ihrer Stelle abhängt (Stellenwert- oder Positionsprinzip).

Diese drei Bereiche sind so etwas wie das „mathematische Immunsystem“ eines Kindes. Sind sie gut ausgebildet, kann das Kind auch Neues einordnen. Fehlen sie, bleibt nur das Zählen. Das Positionspapier der Mathematikdidaktik benennt fast deckungsgleich drei Bereiche des arithmetischen Basisstoffs, an denen Förderung ansetzen muss: Zahlverständnis, dezimales Stellenwertsystem und Operationsverständnis einschließlich der Ablösung vom zählenden Rechnen (Gaidoschik et al. 2021).

Vom Handeln zur Vorstellung

Wie entstehen solche Vorstellungen? Nicht durch Erklären allein. „Hättet ihr mir weniger erklärt, hätte ich mehr verstanden“ – dieser Satz, der dem polnischen Aphoristiker Stanisław Jerzy Lec zugeschrieben wird, gehört zu meinen Lieblingszitat. Kinder verstehen durch lange, gut gemeinte Erklärungen weit weniger, als Erwachsene glauben.

Vorstellungen entstehen, wenn Kinder handeln, das Gesehene beschreiben und das Handeln dann zunehmend im Kopf vollziehen. Der Psychologe Jerome Bruner hat dafür drei Darstellungsebenen beschrieben: die handelnde (enaktive), die bildliche (ikonische) und die symbolische Ebene (Bruner 1974). Im Unterricht spricht man oft vereinfacht von einem Weg:

Handlung → Bild → Vorstellung → Symbol

Entscheidend ist der dritte Schritt, die Vorstellung. Er wird im Unterricht am häufigsten übersprungen. Dann wechseln Kinder direkt vom Material zur Ziffernschreibweise – und nehmen das Material in Gedanken einfach mit, indem sie weiterhin zählen.

Material ist kein Selbstläufer

Hier liegt ein verbreitetes Missverständnis. Viele Erwachsene gehen davon aus, dass Anschauungsmaterial „von selbst“ verständlich ist: Man legt einem Kind Plättchen hin, und es sieht die Mathematik darin. Doch das stimmt nicht. Anschauungsmittel sind für Kinder zunächst einmal **zusätzlicher Lernstoff** (Lorenz 1992). Erwachsene sehen in einem Zwanzigerfeld sofort die Fünfer- und Zehnerstruktur, weil sie wissen, wonach sie suchen. Kinder sehen dort vielleicht nur bunte Punkte. Söbbecke (2005) hat in einer viel beachteten Studie gezeigt, wie unterschiedlich Grundschulkinder ein und dieselbe Darstellung strukturieren – manche erkennen mathematisch tragfähige Strukturen, andere sehen etwas ganz anderes.

Auch die internationale Forschung bestätigt das. Eine Metaanalyse über zahlreiche Studien zum Lernen mit konkreten Materialien fand insgesamt positive, aber eher kleine bis mittlere Effekte – und große Unterschiede je nachdem, wie das Material eingesetzt wurde. Besonders wichtig war, wie

gut die Lernenden angeleitet wurden; sehr detailreiche, „realistische“ Materialien schnitten tendenziell schlechter ab als schlichte (Carbonneau, Marley & Selig 2013). Material allein bringt also wenig. Es kommt darauf an, **welches** Material **wie** eingesetzt wird.

VERTIEFUNG: DAS VIER-PHASEN-MODELL ZUR ABLÖSUNG VOM MATERIAL

Wartha und Schulz (2012) beschreiben einen planvollen Weg, auf dem Kinder vom Material zur Vorstellung gelangen:

1. Das Kind **handelt** am geeigneten Material und beschreibt, was es tut.
2. Das Kind **beschreibt** die Handlung, während es zusieht, wie jemand anderes sie am Material ausführt.
3. Das Kind **beschreibt** die Handlung **ohne Sicht** auf das Material – es muss sie sich vorstellen.
4. Das Kind arbeitet auf der **symbolischen Ebene** und übt, bis Aufgaben automatisiert sind.

Das Modell macht deutlich, dass der Abbau des Materials geplant werden muss. Er ergibt sich nicht von selbst.



Abb. 2 Vom Material zur Vorstellung: vier Phasen nach Wartha & Schulz (2012)

Ich fasse diesen Weg gern in einem Wortspiel zusammen: Aus dem „**Stell dich davor**“ – das Kind steht vor dem Material und rechnet damit – muss ein „**Stell dir vor!**“ werden. Ein gutes Arbeitsmittel macht sich irgendwann selbst überflüssig. Ein Kind, das nach zwei Jahren Förderung immer noch nur mit dem Rechenrahmen rechnen kann, wurde nicht gefördert, sondern an ein Hilfsmittel gebunden.

Verstehen und Üben gehören zusammen

Aus der berechtigten Kritik am bloßen Auswendiglernen folgt nicht, dass Üben unwichtig wäre. Grundlegende Zahlbeziehungen wie $5 + 5$, $7 + 3$ oder $8 + 2$ sollte ein Kind irgendwann sicher abrufen können. Die Reihenfolge ist aber entscheidend:

Verstehen → sinnvoll üben → **automatisieren**. Drill auf unverstandenem Fundament „zementiert“ das Zählen. Übung, die auf Verständnis aufbaut, macht es überflüssig.

Damit ist das Ziel umrissen. Die Frage ist nun: Mit welchen Arbeitsmitteln gelingt dieser Weg am besten? Darum geht es im zweiten Teil.

Arbeitsmittel: weniger, aber besser

Warum das Material darüber mitentscheidet, ob ein Kind zählt oder rechnet – und warum das strukturierte Punktfeld dabei die Hauptrolle spielt.

5

Was ein gutes Arbeitsmittel ausmacht

Eine Leitfrage und sieben Kriterien

Kaum ein Klassenzimmer ist arm an Material. In den Regalen stehen Rechenrahmen, Steckwürfel, Muggelsteine, Wendeplättchen, Zehnersystemmaterial, Zahlenstrahlen, Rechenschiffchen und vieles mehr. Lange galt die Annahme: Je mehr verschiedene Anschauungsmittel ein Kind kennenlernt, desto tragfähiger wird seine Vorstellung. Heute weiß man, dass eher das Gegenteil zutrifft.

Weniger ist mehr

Erich Christian Wittmann, einer der prägenden Mathematikdidaktiker der letzten Jahrzehnte, hat dafür die Formel „Weniger ist mehr“ geprägt (Wittmann 1993). Der Lernerfolg hängt nicht von der Zahl der Materialien ab, sondern von der Reichhaltigkeit und Intensität dessen, was Kinder damit tun (PIKAS 2012). Jedes neue Material ist für Kinder zunächst zusätzlicher Lernstoff (Lorenz 1992). Wer ständig wechselt, zwingt Kinder, immer wieder neue Darstellungen zu entschlüsseln – Zeit, die für das eigentliche Lernen fehlt.

Bemerkenswerterweise ging Zoltán Dienes, auf den die nach ihm benannten Mehrsystemblöcke zurückgehen, in den 1960er-Jahren vom umgekehrten Prinzip aus. Er empfahl, ein mathematisches Konzept in möglichst vielen verschiedenen Verkörperungen anzubieten, damit Kinder das Gemeinsame dahinter entdecken (Dienes 1960). Für mathematisch interessierte, gut vorbereitete Lernende mag das ein reizvoller Weg sein. Für Kinder, die bereits Schwierigkeiten haben, ist es eine Überforderung. Sie brauchen nicht viele Bilder, sondern **ein Bild, das sie wirklich im Kopf sehen können**.

Die Leitfrage

Für die Beurteilung jedes Arbeitsmittels im Anfangsunterricht genügt eine einzige Frage:

Lädt das Material zum **Zählen** ein – oder zum **Sehen und Vorstellen** von Strukturen?

Lose Plättchen, Muggelsteine oder ein einfarbiger Rechenrahmen laden zum Einzelzählen ein. Sie verfestigen damit genau das, was in der Förderung abgebaut werden soll. Ein Zwanzigerfeld mit klarer Fünfer- und Zehnergliederung dagegen erlaubt es, die 7 als „5 und 2“ zu sehen, ohne einen einzigen Punkt zu zählen.

Sieben Kriterien

Aus der Leitfrage und der fachdidaktischen Literatur lassen sich sieben Kriterien ableiten, an denen sich Arbeitsmittel messen lassen müssen:

1. **Struktur:** Macht das Material die Fünfer- und Zehnerstruktur unmittelbar sichtbar?
2. **Simultane Erfassung:** Lassen sich Anzahlen ohne Abzählen erkennen?
3. **Operationen:** Lassen sich nicht nur Zahlen, sondern auch Rechenoperationen und Zerlegungen darstellen? „Nicht jedes Material kann alles“ (PIKAS 2012).

4. **Fortsetzbarkeit:** Trägt die Darstellung über mehrere Zahlenräume – von 10 über 20 und 100 bis 1000 –, sodass Kinder nicht umlernen müssen (PIKAS 2012)?
5. **Mathematische Stimmigkeit:** Passt die Darstellung zu genau der Vorstellung, die im Kopf entstehen soll? Ein Material kann sehr anschaulich und trotzdem für ein bestimmtes Lernziel ungeeignet sein.
6. **Vorstellbarkeit:** Lässt sich das Material leicht im Kopf „nachbauen“, sodass es später wegfallen kann?
7. **Handhabbarkeit:** Kann das Kind selbst damit umgehen und beschreiben, was es tut?

VERTIEFUNG: WARUM KONKRETE OBJEKTE NICHT AUTOMATISCH „KONKRET“ SIND

Die amerikanische Entwicklungspsychologie hat auf ein grundsätzliches Problem aufmerksam gemacht. Ein Arbeitsmittel ist für das Kind immer zweierlei: ein Gegenstand mit eigenen Eigenschaften (Farbe, Form, Gewicht, Spielwert) und zugleich ein Zeichen für etwas anderes, nämlich eine mathematische Beziehung. Uttal, Scudder und DeLoache (1997) sprechen von einer „doppelten Repräsentation“. Je auffälliger der Gegenstand selbst ist, desto schwerer fällt es Kindern, in ihm das Zeichen zu sehen. Ball (1992) warnte schon früh vor „magischen Hoffnungen“ in das bloße Hantieren mit Material, und Thompson (1994) betonte, dass die Bedeutung nicht im Material liegt, sondern in dem, was Kinder im Umgang damit denken. Diese Befunde sprechen für schlichte, klar strukturierte Darstellungen – und für eine sorgfältige Begleitung durch die Lehrkraft.

Im Folgenden werden die wichtigsten Arbeitsmittel des Anfangsunterrichts an diesen Kriterien gemessen. Zunächst das Material, das sie aus meiner Sicht am besten erfüllt.

Das strukturierte Punktefeld

Das sinnvollste Arbeitsmittel vom ersten Schultag bis zum Einmaleins

Ein strukturiertes Punktefeld ist auf den ersten Blick unscheinbar: Punkte in Reihen, nach jeweils fünf durch eine Lücke oder einen Farbwechsel gegliedert. Gerade in dieser Schlichtheit liegt seine Stärke. Es erfüllt alle sieben Kriterien des vorigen Kapitels – und es begleitet Kinder ohne Bruch vom Zahlenraum bis 10 bis zum Einmaleins und darüber hinaus.

Die Familie der Punktefelder

- **Zehnerfeld und Zehnerstreifen:** zehn Punkte, gegliedert in $5 + 5$. Im Streifen nebeneinander, im Feld in zwei Reihen à fünf.
- **Zwanzigerfeld:** zwei Zehnerreihen untereinander, jede nach fünf gegliedert. Das Leitmaterial des ersten Schuljahres.
- **Hunderterfeld:** zehn mal zehn Punkte, nach fünf Reihen und nach fünf Spalten gegliedert. Das Leitmaterial des zweiten Schuljahres und des Einmaleins.
- **Tausenderfeld oder Tausenderbuch:** zehn Hunderterfelder. Damit wird der Zahlenraum bis 1000 sichtbar.

Alle diese Felder haben dieselbe innere Logik. Ein Kind, das im ersten Schuljahr die 7 als „fünf rote und zwei blaue“ sehen gelernt hat, erkennt im zweiten Schuljahr die 37 als „drei volle Reihen und sieben“ – und im dritten Schuljahr die 437 als „vier volle Hunderterfelder, drei Reihen und sieben“. Es muss nichts Neues lernen, nur das Bekannte erweitern.

Die „Kraft der Fünf“

Das Herzstück ist die Fünfergliederung. Günter Krauthausen hat sie unter dem Begriff „**Kraft der Fünf**“ bekannt gemacht und gezeigt, wie sie das denkende Rechnen unterstützt (Krauthausen 1995). Menschen können kleine Mengen bis etwa vier oder fünf auf einen Blick erfassen, ohne zu zählen. Größere Mengen erfassen wir nur dann schnell, wenn sie gegliedert sind. Die Fünfergliederung macht genau das möglich:



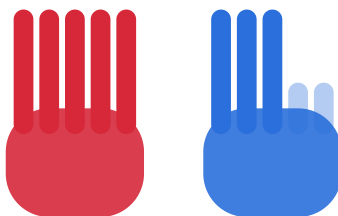
Abb. 3 Ungeordnet muss man zählen – geordnet kann man sehen

- 6, 7, 8 und 9 sind „fünf und eins“, „fünf und zwei“, „fünf und drei“, „fünf und vier“.
- 9 ist zugleich „eins weniger als zehn“, 8 „zwei weniger als zehn“.
- 10 ist „zweimal fünf“, also eine volle Reihe.

Kinder müssen dazu nicht zählen. Sie sehen die Zahlen. Man nennt das **quasi-simultane Zahlerfassung**: Eine Menge wird nicht abgezählt, sondern über ihre Teile erkannt. Wie wichtig diese Fähigkeit ist, zeigt Gaidoschiks Studie aus Kapitel 2: Kinder, die zu Schulbeginn gut quasi-simultan erfassten, lösten am Ende der ersten Klasse deutlich häufiger Aufgaben ohne zu zählen (Gaidoschik 2010).

Finger als natürliches Punktefeld

Ein besonderer Vorteil der Fünfergliederung: Sie entspricht unseren Händen. Fünf Finger an jeder Hand – das ist die Kraft der Fünf, die jedes Kind immer dabei hat. Die Finger sind deshalb nicht das Problem. Das Problem ist das **Abzählen** an ihnen. Ziel ist, Zahlen als **Fingerbilder** „auf einen Griff“ zu zeigen: Die 8 ist eine ganze Hand und drei Finger, ohne dass ein Finger einzeln gezählt wird.



5 und 3 – „auf einen Griff“

Abb. 4 Fingerbild statt Fingerzählen

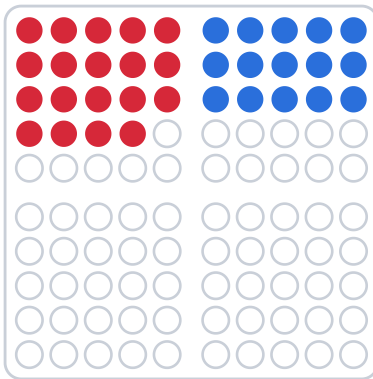
Punktefeld und Fingerbilder stützen sich gegenseitig, weil sie dieselbe Struktur haben. Auch die didaktische Literatur zur Ablösung vom zählenden Rechnen empfiehlt ausdrücklich, Finger statisch als Fingerbild einzusetzen und nicht zählend (Höveler et al. 2022).

Was das Punktefeld alles zeigen kann

Zerlegungen. Ein Stift, quer über einen Zehnerstreifen gelegt, zerlegt die Zahl in zwei Teile. Verschiebt man ihn, entsteht die nächste Zerlegung. Die Fünferstruktur hilft dabei: $7 = 5 + 2$ ist sofort sichtbar, $7 = 4 + 3$ nach kurzem Hinsehen auch.

Zehnerübergang. Bei $8 + 5$ wird im Zwanzigerfeld die erste Reihe mit zwei Punkten aufgefüllt, drei Punkte kommen in die zweite Reihe. Das Bild zeigt den Rechenweg $8 + 2 + 3$ von selbst. Alternativ zeigt das Feld $8 + 5$ als „5 + 5 und noch 3“ – ebenfalls ohne Zählen.

Stellenwerte. Im Hunderterfeld ist eine volle Reihe ein Zehner. Die 34 besteht aus drei vollen Reihen und vier einzelnen Punkten. Damit wird das Bündelungsprinzip sichtbar, und die Ziffern 3 und 4 bekommen eine Bedeutung.

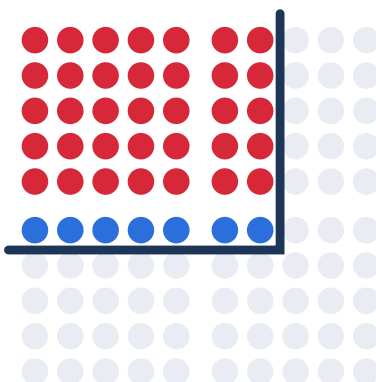


3 volle Reihen
und 4 Punkte

34

Abb. 5 Die 34 im Hunderterfeld: drei Zehner und vier Einer, ohne Zählen erkennbar

Einmaleins. Mit einem Malwinkel – einem rechtwinkligen Stück Pappe – wird im Hunderterfeld ein Rechteck abgedeckt. Sechs Reihen mit je sieben Punkten zeigen $6 \cdot 7$. Die Fünfergliederung macht sofort sichtbar, dass sich die Aufgabe in $5 \cdot 7$ und $1 \cdot 7$ zerlegen lässt. So lernen Kinder das Einmaleins über **Kernaufgaben** ($1 \cdot$, $2 \cdot$, $5 \cdot$, $10 \cdot$) und Ableitungen statt über das reine Auswendiglernen der Reihen. Dieser Ansatz wurde vor allem im Projekt „mathe 2000“ und im Zahlenbuch ausgearbeitet (Wittmann & Müller 2009; Gaidoschik 2014).



$$6 \cdot 7 = ?$$

$$5 \cdot 7 = 35$$

$$1 \cdot 7 = 7$$

$$6 \cdot 7 = 42$$

Abb. 6 Malwinkel am Hunderterfeld: $6 \cdot 7$ als $5 \cdot 7$ plus $1 \cdot 7$

Eine Leitdarstellung für die ganze Schule

Aus diesen Gründen plädiere ich dafür, das strukturierte Punktefeld als **durchgängige Leitdarstellung** zu verwenden – nicht nur in der Förderstunde, sondern im ganzen Mathematikunterricht der Grundschule und möglichst in allen Klassen einer Schule. Wenn jede Lehrkraft ein anderes Material bevorzugt, müssen Kinder bei jedem Lehrerwechsel umlernen. Eine gemeinsame Leitdarstellung dagegen schafft Kontinuität. Kinder, die die Grundschule verlassen, haben dann ein einziges, tragfähiges Bild im Kopf, das sie auch später nutzen können.

Auch ein Punktefeld kann man abzählen

Bei aller Begeisterung: Kein Material wirkt von selbst. Auch ein Zwanzigerfeld mit Wendepfättchen kann zählendes Rechnen fördern, wenn Kinder die Pfättchen einzeln legen und abzählen (Mahiko 2019). Wie Söbbeke (2005) gezeigt hat, müssen Kinder die Struktur einer Darstellung erst sehen lernen. Das Punktefeld entfaltet seine Kraft deshalb nur, wenn es richtig eingesetzt wird.

SO WIRD DAS PUNKTEFELD ZUM DENKWERKZEUG

- **Blitzblick:** Ein Feld nur ein bis zwei Sekunden zeigen und wieder abdecken. Wer zu lange hinsieht, beginnt zu zählen.
- **Nach dem Wie fragen:** „Wie hast du es gesehen?“ – „Fünf oben und drei unten.“ Das Beschreiben macht die Struktur bewusst.
- **Von links und lückenlos legen:** Pfättchen werden immer von links und ohne Lücken gelegt, Reihe für Reihe (Mahiko 2019). So entsteht stets dasselbe Bild für dieselbe Zahl.
- **Zwei Farben nutzen:** Die ersten fünf in einer Farbe, die nächsten fünf in der anderen – wie auf den Punktstreifen.
- **Mit wenigen Handgriffen:** Zahlen sollen mit möglichst wenigen Bewegungen gelegt werden, etwa mit vorbereiteten Fünferstreifen statt mit Einzelpfättchen.
- **Abdecken und vorstellen:** „Mach die Augen zu. Wie sieht die 8 aus? Wie viele fehlen bis 10?“

AUS DER FÖRDERPRAXIS

Wenn ich mit einem Kind zum ersten Mal Punktestreifen „blitze“, zählt es fast immer zuerst – mit den Augen, manchmal mit leise bewegten Lippen. Nach einigen Tagen kommt dann ein Moment, auf den ich jedes Mal warte: Das Kind sagt „sieben“, bevor es überhaupt hätte zählen können. Auf die Frage, wie es das wusste, kommt: „Na, fünf und zwei!“ Dieser Moment ist oft der Anfang vom Ende des zählenden Rechnens.

7

Warum gerade die Fünf?

Sechs Argumente für das Punktefeld als zentrales Arbeitsmittel

Das vorige Kapitel hat gezeigt, was das strukturierte Punktefeld kann. Dieses Kapitel fragt grundsätzlicher: Warum soll gerade dieses Arbeitsmittel im Mittelpunkt der Förderung stehen – und nicht eines von vielen sein? Die Antwort lässt sich in einem Satz zusammenfassen:

Die **Kraft der Fünf** ist die Brücke zwischen dem, was das Auge **ohne Zählen** erfasst, und dem, was der **Zehner** an Struktur braucht.

Diese Brücke lässt sich mit sechs Argumenten begründen. Sie stammen aus der Wahrnehmungspsychologie, aus der Mathematikdidaktik und aus der Förderpraxis – und sie stützen sich gegenseitig.

Argument 1: Das Auge hört bei vier auf

Menschen können sehr kleine Mengen erfassen, ohne zu zählen. Schon 1949 haben Kaufman und Kollegen dafür den Begriff **Subitizing** geprägt, vom lateinischen *subitus*, „plötzlich“: Bis etwa drei oder vier Objekte sehen wir die Anzahl auf einen Blick, sicher und fast ohne Zeitverzögerung (Kaufman et al. 1949). Darüber hinaus wird es schwierig. Größere Mengen müssen entweder gezählt oder **strukturiert** wahrgenommen werden.

Clements (1999) unterscheidet deshalb zwei Formen: das *perzeptuelle* Subitizing kleiner Mengen und das *konzeptuelle* Subitizing, bei dem größere Mengen über erkennbare Teile erfasst werden – etwa eine Würfelsechs als

„zweimal drei“. Neuere Studien sprechen von **Groupitizing**: Kinder bestimmen gegliederte Mengen deutlich schneller und sicherer als ungegliederte, und diese Fähigkeit entwickelt sich gerade in den ersten Schuljahren (Starkey & McCandliss 2014).

Hier setzt die Fünferstruktur an. Eine Fünferreihe ist die kleinste Einheit, die nach etwas Übung als **ein Ganzes** wahrgenommen und zugleich als **Bezugsgröße** genutzt werden kann. Die Sieben besteht dann nicht mehr aus sieben einzelnen Punkten, sondern aus „fünf und zwei“. Das ist quasi-simultane Erfassung – und genau die Ablösung vom zählenden Rechnen, um die es in der Förderung geht.

Argument 2: Die Hand als natürlicher Anker

Fünf Finger hat jedes Kind immer dabei. Eine Hand ist fünf, zwei Hände sind zehn. Dieses Bezugsmaß ist sicher, vertraut und an den eigenen Körper gebunden. Die Fünferstruktur im Punktefeld ist deshalb nichts Künstliches, was Kinder erst mühsam lernen müssten. Sie ist gewissermaßen die **Übertragung dessen nach außen, was das Kind an seinem Körper schon hat** – nur ohne die Gefahr, an den Fingern weiterzuzählen.

Punktefeld und Fingerbilder verweisen so ständig aufeinander. Ein Kind, das die 8 als „volle Hand und drei“ zeigen kann, erkennt dieselbe Struktur im Punktestreifen wieder, und umgekehrt. Beide Darstellungen stärken dieselbe innere Vorstellung.

Argument 3: Die Zehn wird von zwei Seiten sichtbar

Im Zwanzigerfeld mit Fünfergliederung sieht man die 8 auf zweierlei Weise: als **5 und 3** – und ebenso als **10 weniger 2**. Beide Sichtweisen sind gleichzeitig im Bild enthalten.

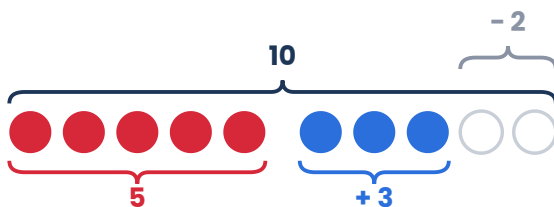


Abb. 7 Die 8 im Zehnerstreifen: fünf und drei – und zugleich zwei weniger als zehn

Diese Doppelsicht ist die Grundlage für fast alles, was im ersten Schuljahr wichtig wird:

- für den **Zehnerübergang**: $8 + 7 = 8 + 2 + 5$, weil man sieht, dass bis zur vollen Reihe zwei fehlen,
- für das **Ergänzen zur Zehn**: Was fehlt bis 10? Die leeren Plätze zeigen es,
- für das **Nachbarzahl-Denken**: 9 ist eins weniger als 10, also ist $9 + 6$ eins weniger als $10 + 6$.

Ein ungegliedertes Feld oder eine durchgehende Zehnerreihe leistet das nicht. Bei acht und bei zehn Punkten in einer einfarbigen Reihe kann ein Kind die beiden Mengen kaum unterscheiden, ohne zu zählen. Mit Fünfergliederung ist der Unterschied sofort zu sehen.

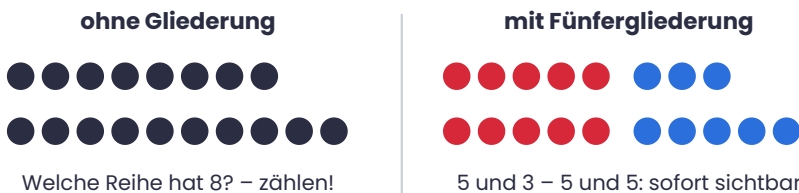


Abb. 8 Acht oder zehn? Ohne Gliederung muss man zählen, mit Fünfergliederung sieht man es

Argument 4: Teil und Ganzes statt Reihenfolge

Zahlenstrahl, Hunderterkette oder Hunderterreihe betonen die **Reihenfolge** der Zahlen: Nach der 7 kommt die 8, die 8 liegt weiter rechts als die 7. Das ist die *ordinale* Sicht auf Zahlen. Das Punktefeld mit Fünferstruktur betont dagegen die **Anzahl** und ihre **Zerlegbarkeit**: Die 8 ist eine Menge, die aus 5 und 3 besteht, die man in 4 und 4 teilen kann und der zur 10 noch 2 fehlen. Das ist die *kardinale* Sicht und mit ihr das Teil-Ganzes-Verständnis, das Resnick (1983) als entscheidenden Schritt im Zahlverständnis beschrieben hat.

Kinder mit Rechenschwierigkeiten verfügen auffallend häufig über eine überwiegend ordinale Zahlvorstellung (Höveler et al. 2022). Zahlen sind für sie Stationen auf einem Weg, Rechnen ist ein Vorwärts- oder Rückwärtsgehen auf diesem Weg – also Zählen. Das Punktefeld arbeitet direkt gegen dieses „Wegstrecken“-Verständnis. Es zeigt, dass Zahlen aus anderen Zahlen bestehen, und macht so den Weg frei für das Rechnen mit Beziehungen.

Argument 5: Eine Struktur für alle Zahlenräume

Dieselbe Struktur trägt vom Zehnerstreifen über das Zwanzigerfeld und das Hunderterfeld bis zum Tausenderfeld. Ein Kind muss die Darstellung nicht wechseln, wenn der Zahlenraum wächst; es erweitert nur, was es schon kennt (PIKAS 2012).

Das ist eines der stärksten Argumente gegen die frühere Materialvielfalt. Jedes neue Material ist für Kinder zunächst zusätzlicher Lernstoff (Lorenz 1992). Es verlangt eine **Übersetzungsleistung**: Wie wird hier die Sieben dargestellt? Was ist hier ein Zehner? Gerade rechenschwache Kinder scheitern häufig nicht an der Mathematik selbst, sondern an dieser Übersetzung. Wer im ersten Schuljahr mit dem Zwanzigerfeld, im zweiten mit dem Rechenrahmen, im dritten mit Dienes-Material und zwischendurch mit dem Zahlenstrahl arbeiten muss, lernt vor allem eines: dass jede Darstellung anders funktioniert.

Argument 6: Didaktisch und empirisch gut abgesichert

Die Fünferstruktur ist keine Einzelmeinung. Sie wurde vor allem im Projekt „mathe 2000“ und im Zahlenbuch von Wittmann und Müller systematisch ausgearbeitet (Wittmann & Müller 2009) und von Krauthausen (1995) unter dem Begriff „Kraft der Fünf“ didaktisch begründet. Gerster und Schultz (2004) haben in ihrem Freiburger Forschungsbericht zur Rechenschwäche strukturierte Darstellungen als Mittel gegen das zählende Rechnen herausgestellt; Schipper (2009) und die Bielefelder Arbeiten zur Förderung bei Rechenstörungen sowie Gaidoschik (2010) haben diesen Ansatz weiter gestützt. Heute empfehlen auch die Fördermaterialien des Deutschen Zentrums für Lehrkräftebildung Mathematik ausdrücklich Punktefelder und Fingerbilder zur Ablösung vom zählenden Rechnen (Höveler et al. 2022). Die Fünferstruktur ist damit im deutschsprachigen Raum praktisch zum fachdidaktischen Standard geworden.

Auch die empirischen Befunde weisen in diese Richtung. Gaidoschik (2010) fand, dass Kinder, die zu Schulbeginn kleine Mengen gut quasi-simultan erfassen, am Ende des ersten Schuljahres deutlich häufiger nicht-zählend rechnen. In einer Interventionsstudie mit 147 Erstklässlern verbesserte ein Training mit strukturierten Punktmustern nicht nur die Zahlerfassung, sondern auch die Rechenleistung (Obersteiner, Reiss & Ufer 2013). Und internationale Studien zeigen, dass das Bewusstsein für Muster und Strukturen eng mit dem mathematischen Lernerfolg junger Kinder zusammenhängt und sich gezielt fördern lässt (Mulligan & Mitchelmore 2009).

VERTIEFUNG: WAS DIE BEFUNDE ZEIGEN – UND WAS NICHT

Die genannten Studien belegen, dass strukturierte Mengenwahrnehmung mit späterem Rechenerfolg zusammenhängt und dass sie sich trainieren lässt. Einen direkten Vergleich „Punktefeld gegen alle anderen Materialien“ unter kontrollierten Bedingungen gibt es dagegen kaum – wie bei den meisten Fragen der Unterrichtsgestaltung. Die Begründung für das Punktefeld als zentrales Arbeitsmittel ruht deshalb auf mehreren Säulen zugleich: auf der Wahrnehmungspsychologie (Argument 1), auf der mathematischen Struktur des Zehnersystems (Argumente 3 bis 5), auf fachdidaktischer Theorie und Praxiserfahrung (Argument 6) – und auf der Beobachtung, dass es genau das Problem angreift, das rechenschwache Kinder fast immer haben: das verfestigte Zählen.

Die Grenze: Struktur wirkt nicht von selbst

Bei aller Überzeugung bleibt eine wichtige Einschränkung. Die Fünferstruktur ist ein **Angebot**, keine Garantie. Ein Kind kann auch im schönsten Zwanzigerfeld alle Punkte einzeln abzählen. Ob es die Struktur sieht, hängt davon ab, wie mit dem Material gearbeitet wird – Söbbeke (2005) hat eindrucksvoll gezeigt, wie unterschiedlich Kinder ein und dieselbe Darstellung deuten.

Zur mentalen Vorstellung wird die Struktur erst durch drei Dinge:

1. **Blitzblick-Übungen**, bei denen das Bild so kurz gezeigt wird, dass Zählen gar nicht möglich ist,
2. **„Wie siehst du es?“-Gespräche**, in denen das Kind beschreibt, welche Teile es erkannt hat,
3. das **bewusste Verhindern des Zählens** – durch Abdecken, durch Vorstellen mit geschlossenen Augen und durch Lob für das Begründen statt für das Ergebnis.

Ohne diese Arbeit ist das Punktefeld nur ein **hübscheres Zählbrett**. Mit ihr wird es zum wichtigsten Werkzeug auf dem Weg **vom Zählen zum Rechnen**.

Die sechs Argumente im Überblick

Argument	Was das Punktfeld leistet	Was ungegliederte Materialien nicht leisten
1 Wahrnehmung	Mengen über 4 werden über Fünfteile ohne Zählen erfasst	Mengen über 4 müssen gezählt werden
2 Hand	Knüpft an das Bezugsmaß Hand an, ohne Fingerzählen	Kein Bezug zum eigenen Körper
3 Zehn	Zeigt 8 als $5 + 3$ und als $10 - 2$ zugleich	8 und 10 sind kaum zu unterscheiden
4 Teil-Ganzes	Betont Anzahl und Zerlegbarkeit	Betont Reihenfolge („danach kommt ...“)
5 Konsistenz	Eine Struktur von 10 bis 1000	Neue Darstellung, neue Übersetzung
6 Absicherung	Fachdidaktischer Standard, empirisch gestützt	Vielfach nicht tragfähig (vgl. Kapitel 9)



Das Dienes-Material auf dem Prüfstand

Anschaulich – aber für das Stellenwertverständnis die zweitbeste Wahl

Kaum ein Anschauungsmittel zum Stellenwertsystem ist so verbreitet wie die Mehrsystemblöcke, oft auch Dienes-Material, Zehnersystemmaterial oder Base-Ten-Blocks genannt. Einerwürfel, Zehnerstange, Hunderterplatte und Tausenderwürfel zeigen sehr eindrucksvoll, wie viel ein Zehner, ein Hunderter und ein Tausender ist. In vielen Klassenzimmern und Förderräumen gehört das Material zur Grundausrüstung, und auch in didaktischen Handreichungen wird es häufig empfohlen, etwa wegen seiner Fortsetzbarkeit über alle Zahlenräume (PIKAS 2012).

Ich habe mit diesem Material in meiner Förderarbeit mit vielen Kindern gearbeitet. Meine Erfahrung ist eindeutig: Gerade Kindern mit Rechenschwierigkeiten hilft es weder beim Mengen- noch beim Stellenwertverständnis wirklich weiter – oft wirkt es sogar eher hinderlich. Warum das so ist, lässt sich gut begründen. Es lohnt sich aber, zunächst auf die Herkunft des Materials zu schauen.

Warum heißen sie eigentlich Mehrsystemblöcke?

Der aus Ungarn stammende Mathematiker und Pädagoge Zoltán P. Dienes (1916–2014) entwickelte seine „Multibase Arithmetic Blocks“ in den 1950er- und 1960er-Jahren für ein ganz bestimmtes Ziel: Kinder sollten **verschiedene Zahlensysteme** untersuchen – zum Beispiel mit Bündeln zu je drei, vier oder fünf statt zu je zehn – und dadurch die allgemeine Struktur von Stellenwertsystemen entdecken (Dienes 1960). Deshalb gab es die Blöcke ursprünglich in Sätzen für unterschiedliche Basen.

Dieser ursprüngliche Zweck spielt in keinem heutigen Grundschullehrplan mehr eine Rolle. Verwendet wird fast ausschließlich der Satz für das Zehnersystem. Es ist durchaus paradox: Ein Material, das für den Vergleich vieler Systeme erfunden wurde, wird heute vor allem eingesetzt, um ein einziges System zu lernen – und das häufig mit Kindern, für die schon dieses eine System eine große Herausforderung ist. Das allein spricht nicht gegen das Material. Es zeigt aber, dass ein bekanntes Material nicht automatisch das passende Material für jedes heutige Lernziel ist.

Erstes Argument: Die Größe zeigt den Wert – nicht der Ort

Das zentrale Prinzip unserer Zahlschrift ist das **Positionsprinzip**. In der Zahl 333 steht dreimal genau dasselbe Zeichen. Trotzdem bedeutet es einmal 300, einmal 30 und einmal 3. Nicht Größe, Farbe oder Form des Zeichens bestimmen seinen Wert, sondern allein seine Stelle.

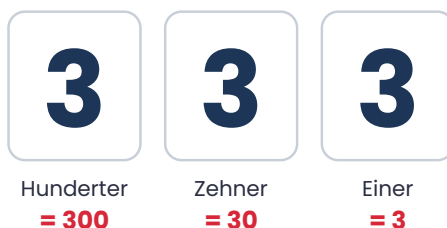
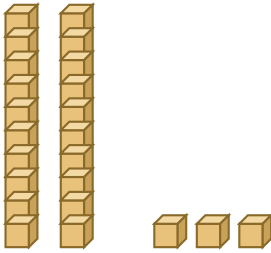


Abb. 9 Dreimal dasselbe Zeichen, dreimal ein anderer Wert: Das Positionsprinzip

Beim Dienes-Material ist es genau umgekehrt. Ein Hunderter ist eine große Platte, ein Zehner eine Stange, ein Einer ein kleiner Würfel. Der Wert steckt im **Gegenstand selbst**, nicht in seinem Ort. Man kann die Teile beliebig durcheinander auf den Tisch legen – die Zahl bleibt dieselbe. Das Material bildet damit das Bündelungsprinzip und die Größenverhältnisse sehr gut ab, das Positionsprinzip aber gerade nicht.



Größe zeigt den Wert

Z	E
● ●	● ● ●

Ort zeigt den Wert

Abb. 10 Links: Beim Dienes-Material steckt der Wert in der Größe. Rechts: In der Stellenwerttafel mit gleichen Plättchen steckt der Wert im Ort.

Eine Stellenwerttafel mit **gleich aussehenden Plättchen** dagegen zwingt das Kind, genau das zu verstehen, worauf es ankommt: Ein Plättchen in der Zehnerspalte ist zehnmal so viel wert wie ein gleiches Plättchen in der Einerspalte. Der Ort trägt die Bedeutung – genau wie in der Zahlschrift. Dienes-Material und Zahlschrift senden also zwei unterschiedliche Botschaften. Wer mit Dienes-Material lernt, muss das Positionsprinzip zusätzlich und ausdrücklich erarbeiten.

Zweites Argument: Man kann es abzählen

Eine Zehnerstange besteht sichtbar aus zehn Einerwürfeln, eine Hunderterplatte aus hundert. Für ein Kind, das ohnehin zählt, ist das eine Einladung: Es zählt die Würfel an der Stange ab, manchmal sogar die Würfel auf der Platte. Das Material soll den Zehner als Einheit zeigen, aber es lässt sich als Ansammlung von Einern behandeln. Das Stellenwertprinzip wird dabei elegant umgangen.

Drittes Argument: Ohne Fünferstruktur und ohne Anschluss

Eine Zehnerstange ist eine Reihe von zehn gleich aussehenden Würfeln ohne Fünfergliederung. Sieben einzelne Einerwürfel kann man nicht „sehen“, man muss sie zählen. Für Kinder, die im ersten Schuljahr mit dem Zwanzigerfeld und der Kraft der Fünf gearbeitet haben, bedeutet das

Dienes-Material im zweiten Schuljahr einen **Bruch**: Sie müssen eine neue Darstellung lernen, die ihre bisher aufgebauten Strukturen nicht nutzt. Das Hunderterfeld dagegen setzt das Zwanzigerfeld bruchlos fort.

Viertes Argument: Zwischen Material und Ziffer klafft eine Lücke

Die internationale Forschung hat wiederholt beobachtet, dass Kinder mit Mehrsystemblöcken korrekt handeln können, ohne die Handlung mit der geschriebenen Zahl oder dem schriftlichen Rechenverfahren zu verbinden (Resnick & Omanson 1987; Thompson 1994). Ross (1989) beschrieb in einem viel zitierten Entwicklungsmodell, dass viele Kinder auch nach Jahren Stellenwertunterricht auf die Bitte, mit Plättchen zu zeigen, was die 2 in der Zahl 26 bedeutet, zwei Plättchen zeigen – statt zwanzig.



Abb. 11 Eine typische Antwort: Die 2 in 26 wird als „zwei Stück“ gedeutet (vgl. Ross 1989)

Eine Studie von Uttal und Kollegen ergab, dass Kinder, die zweistellige Subtraktion mit Material gelernt hatten, zunächst ebenso gut abschnitten wie andere, das Gelernte aber deutlich schwerer auf schriftliche Aufgaben übertrugen (Uttal & DeLoache 2006). Das ist kein Argument gegen jede Anschauung – wohl aber gegen die Hoffnung, dass ein Material das Verständnis „von selbst“ in den Kopf bringt.

Die Kritik aus verschiedenen Perspektiven

Die Zweifel am Dienes-Material sind keine Einzelmeinung aus der Förderpraxis. Sie kommen aus sehr unterschiedlichen Richtungen der Forschung – von der Entwicklungspsychologie über die Mathematikdidaktik bis zur experimentellen Lernpsychologie. Die folgenden Positionen sind ungefähr danach geordnet, wie grundsätzlich sie sind.

Constance Kamii: Stellenwert muss im Kopf konstruiert werden. Die amerikanische Piaget-Schülerin Constance Kamii vertritt die grundsätzlichsste Kritik. Für sie ist das Stellenwertverständnis eine logisch-mathematische Konstruktion, die jedes Kind in seinem eigenen Denken aufbauen muss. Man kann sie nicht „im Material sehen“ und nicht von außen über Anschauungsmittel übertragen (Kamii 1986). Wie schwer diese Konstruktion fällt, zeigten Kamii und Joseph in Interviews: Auf die Frage, was die 1 in der Zahl 16 bedeutet, zeigte kein einziges Kind der ersten Klasse zehn Gegenstände, in der dritten Klasse war es ein Drittel, in der vierten die Hälfte – nach Jahren Stellenwertunterricht, der in der Regel mit Material gestaltet war (Kamii & Joseph 1988). Kamii warnt deshalb davor, dass ein geschickter Umgang mit Material Lehrkräften wie Kindern ein **Verständnis vortäuschen** kann, das im Kopf gar nicht vorhanden ist.

Ladel und Kortenkamp: Das Volumen widerspricht der Stellenwerttafel. Eine sehr präzise, speziell auf Stellenwertmaterial bezogene Kritik formulieren Silke Ladel und Ulrich Kortenkamp. In der Stellenwerttafel ersetzen die Spalten die Bündelgröße: Ein Plättchen in der Hunderterspalte bedeutet hundert, weil es dort liegt. Deshalb sollte sich der Wert am Ende **nicht mehr im Volumen des Materials** widerspiegeln. Wer Bündelungsmaterial wie Hunderterplatten in die Stellenwerttafel legt, vermischt beide Logiken – das kann bei Kindern zu mathematischen Fehlvorstellungen führen (Ladel & Kortenkamp 2014). Zugespietzt heißt das: Je besser ein Kind das Stellenwertsystem versteht, desto irreführender wird ein Material, das ihm sagt, ein Hunderter sei „in Wirklichkeit“ hundertmal so groß wie ein Einer. Ladel und Kortenkamp lehnen Material nicht grundsätzlich ab, schlagen aber für die Stellenwerttafel gleich aussehende Plättchen vor – genau die Lösung, die auch dieses Buch empfiehlt.

Deborah Ball: „Magische Hoffnungen“. Der wohl meistzitierte kritische Text zur Arbeit mit Anschauungsmaterial stammt von der amerikanischen Mathematikdidaktikerin Deborah Ball. Er bezieht sich nicht nur auf Dienes-Material, sondern auf die gesamte Bewegung, die sich vom Hantieren mit Material automatisch Verständnis versprach. Ball nennt das „magische Hoffnungen“: die Vorstellung, mathematisches Verstehen entstehe gleichsam von selbst aus den Händen (Ball 1992).

Kaminski, Sloutsky und Heckler: Konkretheit kann den Transfer behindern. Die härtesten experimentellen Befunde stammen aus der Lernpsychologie. In einer viel beachteten Studie lernten Studierende ein mathematisches Prinzip entweder an konkreten, anschaulichen Beispielen oder an abstrakten Symbolen. Die Gruppe mit den konkreten Beispielen konnte das Gelernte anschließend kaum auf eine neue Situation übertragen; die Symbolgruppe schnitt deutlich besser ab (Kaminski, Sloutsky & Heckler 2008). Ähnliches zeigte sich bei Kindern: Zusätzliche, für die Mathematik unwichtige Details in einer Darstellung lenkten ab und erschwerten den Wissenserwerb (Kaminski & Sloutsky 2013). Diese Studien untersuchten kein Dienes-Material, und sie betrafen andere Inhalte als den Anfangsunterricht. Sie zeigen aber eindringlich, dass mehr Anschaulichkeit nicht automatisch mehr Verstehen bedeutet.

Uttal, McNeil und Fyfe: Material ja – aber befristet. Am differenziertesten sind die Positionen, die wir schon in Kapitel 5 kennengelernt haben. Uttal, Scudder und DeLoache (1997) zeigen, dass Material die Aufmerksamkeit auf seine eigenen Objekteigenschaften lenken kann statt auf die Mathematik. McNeil und Fyfe (2012) haben daraus das Konzept des „**concreteness fading**“ entwickelt, des schrittweisen Verblässens der Konkretheit: Man beginnt anschaulich, macht die Darstellung dann bewusst immer schlichter und endet beim Symbol. In ihren Studien führte dieser Weg zu besserem Transfer als rein konkretes oder rein abstraktes Lernen (McNeil & Fyfe 2012; Fyfe et al. 2014). Das ist im Kern derselbe Gedanke wie das Vier-Phasen-Modell von Wartha und Schulz aus Kapitel 4.

VERTIEFUNG: WAS DIE KRITIK GEMEINSAM HAT

So verschieden die Ansätze sind, sie laufen auf drei gemeinsame Einsichten hinaus. Erstens: **Material erzeugt kein Verständnis von selbst** – entscheidend ist, was im Kopf des Kindes geschieht. Zweitens: **Je mehr ein Material durch eigene Merkmale wie Größe, Form oder Detailreichtum auffällt, desto eher lenkt es von der mathematischen Struktur ab.** Drittens: **Material muss planvoll wieder abgebaut werden.** Das Dienes-Material steht bei allen drei Punkten schlechter da als das strukturierte Punktefeld: Sein Wert steckt gerade in einer auffälligen Eigenschaft, der Größe, und es lädt zählende Kinder zum Abzählen ein. Das Punktefeld ist schlichter, trägt die Struktur des Zehnersystems ohne Umweg und lässt sich leicht im Kopf vorstellen – und damit auch leichter wieder weglassen.

Was stattdessen?

Für den Aufbau des Stellenwertverständnisses empfehle ich zwei Darstellungen, die sich ergänzen:

	Dienes-Material	Hunderterfeld	Stellenwerttafel mit gleichen Plättchen
Bündelung sichtbar	ja	ja (volle Reihe = Zehner)	ja, durch Tauschen 10 gegen 1
Positionsprinzip sichtbar	nein, Größe trägt den Wert	teilweise	ja, der Ort trägt den Wert
Fünferstruktur	nein	ja	entfällt
Lädt zum Abzählen ein	ja	wenig, bei richtigem Einsatz	wenig
Anschluss an Zwanzigerfeld	nein	bruchlos	gut
Gut vorstellbar	mittel	gut	gut

Das **Hunderterfeld** zeigt, *wie viel* eine Zahl ist, und macht den Zehner als volle Reihe sichtbar. Die **Stellenwerttafel mit gleichen Plättchen** zeigt, *wie* die Zahl geschrieben wird, und trainiert das Bündeln und Entbündeln: Liegen zehn Plättchen in der Einerspalte, werden sie gegen ein Plättchen in der Zehnerspalte getauscht. Bei diesen Tauschspielen lernen Kinder genau das, worauf es im Stellenwertsystem ankommt.

Beim Dienes-Material zeigt die **Größe** den Wert. In unserer Zahlschrift zeigt der **Ort** den Wert. Ein gutes Arbeitsmittel für das Stellenwertverständnis muss das zweite sichtbar machen.

Weitere Materialien im Check

Rechenrahmen, Zahlenstrahl, Steckwürfel und Co.

Neben Punktefeld und Dienes-Material gibt es eine Vielzahl weiterer Arbeitsmittel. Die folgende Übersicht misst die wichtigsten an der Leitfrage: Zählen oder Sehen?

Der Rechenrahmen

Der Rechenrahmen (oft auch Abakus genannt) ist in vielen Klassen das wichtigste Material im Zahlenraum bis 100. Er kann ein gutes Werkzeug sein – oder ein Zählgerät. Entscheidend sind zwei Dinge:

- **Gestaltung:** Ein einfarbiger Rechenrahmen ohne sichtbare Markierung bei fünf und zehn bietet nichts zu sehen, nur zu zählen. Brauchbar sind nur Rahmen mit Farbwechsel nach jeweils fünf Kugeln.
- **Gebrauch:** Werden die Kugeln einzeln geschoben, wird gezählt. Zahlen sollen mit möglichst wenigen Zügen eingestellt werden, etwa die 7 mit einem einzigen Schub von fünf roten und zwei blauen Kugeln.

einfarbig: 7 muss man zählen



Farbwechsel nach 5: 7 sieht man



Abb. 12 Ein einfarbiger Rechenrahmen lädt zum Zählen ein, Farbwechsel nach fünf zum Sehen

Der Rechenrahmen eignet sich gut für Aufgaben wie $43 + 8$ oder $43 - 5$, bei denen Einer zu einer Zahl addiert oder von ihr subtrahiert werden. Bei Aufgaben mit vollen oder gemischten Zehnern wie $43 + 25$ wird die Darstellung dagegen schnell unübersichtlich (PIKAS 2012). Im Vergleich zum Hunderterfeld hat er zudem den Nachteil, dass Kinder ihn nur schwer selbst zeichnen und sich nur schwer vorstellen können.

Der Zahlenstrahl

Der Zahlenstrahl stellt Zahlen als Punkte auf einer Linie dar. Damit zeigt er Zahlen als **Orte in einer Reihenfolge** – also gerade die ordinale Sicht, über die zählende Kinder ohnehin schon verfügen. Die Zahl als Menge ist im Zahlenstrahl nicht zu sehen. Kinder verwechseln außerdem häufig Striche und Abstände und zählen die Striche ab, statt Abstände zu betrachten.



Die 7 ist hier ein Ort, keine Menge

Abb. 13 Auf dem Zahlenstrahl ist die 7 ein Ort, keine Menge

Der Zahlenstrahl ist eine hochabstrakte Darstellung. Im Anfangsunterricht kommt er zu früh. Später – etwa als Rechenstrich im Zahlenraum bis 1000 oder zum Vergleichen und Runden großer Zahlen – kann er sehr nützlich sein, dann nämlich, wenn Kinder bereits eine sichere Mengenvorstellung haben.

Unstrukturiertes Zählmaterial

Lose Muggelsteine, Glasnuggets, Bohnen, Kastanien oder Plättchenhaufen sind beliebt, weil sie günstig und „kindgerecht“ sind. Für den Aufbau von Mengenvorstellungen sind sie wenig geeignet: Sie laden zum Einzelzählen ein und verfestigen genau das, was abgebaut werden soll. Ähnliches gilt für Steckwürfel, solange sie als einzelne Würfel verwendet werden.

Werden sie dagegen konsequent zu zweifarbigen Fünfer- und Zehnerstangen zusammengesteckt, lassen sie sich durchaus strukturiert nutzen.

Unstrukturiertes Material hat dennoch einen Platz – nämlich dort, wo Kinder **selbst strukturieren** sollen: Eine Handvoll Bohnen wird in Fünfer- oder Zehnerhäufchen geordnet und so überschaubar gemacht. Dann wird gerade der Übergang vom Zählen zum strukturierten Sehen zum Thema.

Finger

Über die Finger wurde schon gesprochen. Als dauerhafte Zählhilfe sind sie ein Symptom, keine Lösung. Als strukturierte Fingerbilder dagegen sind sie ein hervorragendes, immer verfügbares Punktefeld. Ein Verbot des Fingerrechnens nützt nichts – es treibt das Zählen nur in den Untergrund, unter den Tisch oder in die Schuhe.

Motivationsmaterial ohne Strukturbezug

Rechenmandalas, Rechenmalblätter, Rechenrätsel mit Lösungsbildern und viele Würfelspiele sind bei Kindern und Erwachsenen beliebt. Sie haben eines gemeinsam: Sie verpacken Aufgaben attraktiv, ändern aber nichts daran, **wie** das Kind rechnet. Ein zählendes Kind zählt beim Ausmalen weiter. Für Kinder mit Rechenschwierigkeiten kosten solche Materialien wertvolle Förderzeit, ohne Verständnis aufzubauen.

Übersicht

Wenig wirksam bis hinderlich	Tragfähig und empfohlen
Unstrukturiertes Zählmaterial (lose Plättchen, Muggelsteine, Steckwürfel einzeln)	Strukturierte Punktefelder (Zwanziger-, Hunderter-, Tausenderfeld) mit Fünfergliederung
Dienes-Material für zählende Kinder	Stellenwerttafel mit gleichen Plättchen und Tauschspielen
Einfarbige Rechenrahmen und Perlenketten	Rechenrahmen mit Farbwechsel, mit wenigen Zügen eingestellt

Wenig wirksam bis hinderlich	Tragfähig und empfohlen
Zahlenstrahl im Anfangsunterricht	Blitzblick-Übungen mit Begründung („Ich habe fünf und drei gesehen“)
Finger als dauerhafte Zählhilfe	Strukturierte Fingerbilder
Rechenmandalas, Malblätter, Würfelspiele ohne Strukturbezug	Zahlzerlegung als eigenes Thema: Schüttelbox, Zerlegungshäuser
Drill-Apps mit Belohnungssystem (siehe Kapitel 15)	Punktefeld und Malwinkel für das Einmaleins

FÜR SCHULEN: AUSSORTIEREN LOHNT SICH

Viele Schulen besitzen über Jahrzehnte angesammelte Materialbestände. Es lohnt sich, sie gemeinsam im Kollegium nach der Leitfrage „Zählen oder Sehen?“ zu sichten und Materialien, die nicht tragfähig sind, aus der Förderung zu nehmen. Weniger Material im Regal bedeutet mehr Klarheit im Kopf – bei den Kindern wie bei den Lehrkräften.

Förderpraxis

Wie Mengenvorstellung, Zahlzerlegungen und Stellenwertverständnis Schritt für Schritt aufgebaut werden – und wann das Üben sinnvoll wird.

10

Mengen auf einen Blick erfassen

Grundvorstellung 1 in der Praxis

Am Anfang steht die Einsicht, dass eine Zahl angibt, **wie viele** etwas sind. Für Erwachsene ist das selbstverständlich. Für viele Kinder mit Rechenschwierigkeiten ist es das nicht. Sie verbinden die Zahl 7 vor allem mit dem siebten Platz in der Zählreihe – mit „die Siebte“, nicht mit „sieben Stück“. Ziel dieses ersten Förderbereichs ist deshalb, dass Kinder Anzahlen als Ganzes wahrnehmen und zunehmend ohne Zählen erkennen.

Die gute Nachricht: Mengenvorstellung lässt sich vergleichsweise schnell aufbauen. In meiner Förderarbeit sind hier oft schon nach wenigen Wochen deutliche Fortschritte zu sehen – vorausgesetzt, es wird täglich und mit klar strukturierten Darstellungen geübt.

Der Weg in fünf Schritten

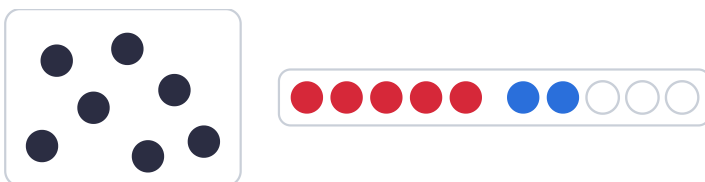
1. Fingerbilder. Zahlen bis zehn werden „auf einen Griff“ gezeigt, nicht abgezählt. Die 6 ist eine volle Hand und ein Finger, die 9 zwei Hände ohne einen. Erwachsene zeigen, das Kind nennt die Zahl – und umgekehrt.

2. Punktestreifen bis 10. Zweifarbige Zehnerstreifen (fünf rot, fünf blau) werden kurz gezeigt. Das Kind nennt die Zahl und beschreibt, wie es sie gesehen hat.

3. Zwanzigerfeld. Dieselbe Übung im Zahlenraum bis 20: Die 14 ist eine volle Reihe und vier, die 18 ist zwei weniger als 20.

4. Blitzblick mit Begründung. Die Darstellung wird nur ein bis zwei Sekunden gezeigt. Wer zu lange hinsieht, zählt. Entscheidend ist die anschließende Frage: „Wie hast du es gesehen?“

5. Vorstellen ohne Material. „Mach die Augen zu. Stell dir die 8 auf dem Streifen vor. Wie viele Punkte sind leer?“ Erst wenn das gelingt, ist die Vorstellung wirklich im Kopf angekommen.



Wie viele? – zählen

Wie viele? – man sieht es: 5 und 2

Abb. 14 Ziel ist der Wechsel vom Zählen zum strukturierten Sehen

ÜBUNGEN FÜR ZU HAUSE UND IM UNTERRICHT

- **Blitzblick-Karten:** Punktestreifen bis 10 und bis 20 auf Karten drucken (Vorlagen auf erste-hilfe-mathematik.de) und täglich wenige Minuten „blitzen“.
- **Ordnen statt zählen:** Eine Handvoll Bohnen oder Knöpfe in Fünferhäufchen legen und die Anzahl dann „sehen“.
- **Was fehlt bis 10?** Ein Punktestreifen mit 7 Punkten wird gezeigt: „Wie viele fehlen bis zur vollen Reihe?“
- **Mehr oder weniger?** Zwei Darstellungen blitzen: „Wo sind mehr? Wie viele mehr?“

VERTIEFUNG: SIMULTAN UND QUASI-SIMULTAN

Kleine Mengen bis etwa vier erfassen Menschen ohne Zählen „auf einen Blick“ – man spricht von **simultaner** Erfassung. Größere Mengen lassen sich nur dann schnell bestimmen, wenn sie in erkennbare Teile gegliedert sind und diese Teile zusammengesetzt werden: **quasi-simultane** Erfassung. Sie verbindet Mengenvorstellung und Zerlegungsverständnis, denn wer die 7 als 5 und 2 sieht, hat bereits eine Zerlegung genutzt. Gaidoschik (2010) fand die quasi-simultane Zahlerfassung zu Schulbeginn als einen der deutlichsten Hinweise auf späteren Erfolg beim nicht-zählenden Rechnen. Auch die Materialien zur Ablösung vom zählenden Rechnen nennen „Anzahlen strukturiert sehen“ als eigenen Förderbaustein (Höveler et al. 2022).

Passende digitale Übungen bieten die EHM-Apps **Punktefeld – Zahlenfeld – Blitzblick, Zeig es mit Händen und Fingern** (eine Menge blitzt auf, das Kind zeigt die Anzahl mit den eigenen Fingern auf dem Tablet) und das Spiel **Hagelkörner**. Was beim Einsatz solcher Apps zu beachten ist, beschreibt Kapitel 15.



Zahlen zerlegen und zusammensetzen

Grundvorstellung 2 in der Praxis

Die zentrale Erkenntnis, die ein Kind für das Rechnen braucht, lautet: **Zahlen bestehen aus anderen Zahlen.** Die 7 ist 5 und 2, aber auch 4 und 3, 6 und 1. Wer das sicher weiß, muss nicht mehr zählen. Er kann $7 + 5$ als $7 + 3 + 2$ rechnen oder als $5 + 5 + 2$. Zerlegungen sind damit das eigentliche Werkzeug des Rechnens – für Addition und Subtraktion, für den Zehnerübergang und später für das Rechnen mit großen Zahlen.

Eigentlich müsste der Aufbau dieser Grundvorstellung ein **Dauerschwerpunkt** des gesamten Anfangsunterrichts sein, nicht ein Thema, das nach zwei Wochen abgehakt ist. Gaidoschik (2010) empfiehlt ausdrücklich, Zahlen von Anfang an als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen zu erarbeiten.

Zerlegungen sichtbar machen

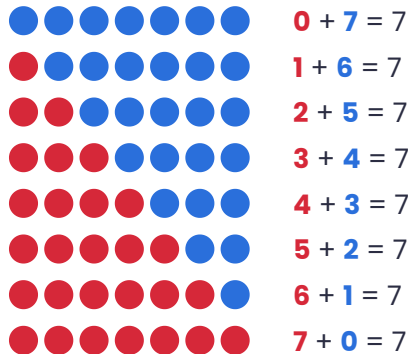


Abb. 15 Alle Zerlegungen der 7, geordnet dargestellt: Ein Teil wird größer, der andere kleiner

Werden alle Zerlegungen einer Zahl geordnet dargestellt, entsteht ein Muster. Kinder, die dieses Muster sehen und beschreiben, beginnen zu verstehen, statt auswendig zu lernen. Besonders wichtig sind die **Zerlegungen der Zehn**: 9 und 1, 8 und 2, 7 und 3, 6 und 4, 5 und 5. Sie sind der Schlüssel zum Zehnerübergang. Wer weiß, dass 8 und 2 zusammen 10 ergeben, kann $8 + 5$ über die Zehn rechnen.



$$7 = 4 + 3 - \text{der Stift „zerlegt“ den Streifen}$$

Abb. 16 Ein Stift zerlegt den Zehnerstreifen: $7 = 4 + 3$

Eine sinnvolle Reihenfolge

1. Zerlegungen bis 5 (am Fingerbild einer Hand),
2. Zerlegungen bis 10, besonders der 10 selbst,
3. Verdoppeln und Halbieren bis 20 ($6 + 6$, $7 + 7$...),
4. Zerlegungen bis 20 über die Zehn ($14 = 10 + 4$),

5. Nutzung beim Zehnerübergang ($8 + 5 = 8 + 2 + 3$).

ÜBUNGEN FÜR ZU HAUSE UND IM UNTERRICHT

- **Punktestreifen und Stift:** Einen Stift zwischen die Punkte legen. „Wie viele links, wie viele rechts?“ Dann den Stift verschieben und die nächste Zerlegung finden.
- **Schüttelbox:** Eine Schachtel mit Trennwand und z. B. sieben Kugeln wird geschüttelt. „Links liegen drei – wie viele sind rechts?“ Erst raten, dann nachsehen. Die EHM-App **Kugeln in der Box** bietet eine digitale Variante.
- **Würfel-Trick:** Die gegenüberliegenden Seiten eines Spielwürfels ergeben immer 7. „Oben ist die 5 – was liegt unten?“
- **Auf die Zielzahl ergänzen:** Eine Ziffernkarte wird gezogen: „Was fehlt bis 10?“ Später: „Was fehlt bis 20?“ In der EHM-App **Mengenpuzzle** sieht das Kind die Zielzahl und den vorhandenen Teil als Punktmenge und wählt die Karte, die genau ergänzt.
- **Alle Zerlegungen finden:** „Welche Plusaufgaben haben das Ergebnis 10?“ Die Aufgaben werden untereinander aufgeschrieben, am Ende wird gemeinsam auf die Liste geschaut: Was fällt dir auf? Die EHM-App **Ergebniszahl sucht Plusaufgaben** setzt das für Ergebniszahlen bis 25 um – wahlweise mit Zahlen oder mit Punkten in Fünferstruktur.
- **Zehnerfreunde finden:** Mit Spielkarten (z. B. selbst gemachten Zahlenkarten) und einer Tischklingel: Wer zuerst zwei Karten findet, die zusammen 10 ergeben, klingelt. Die EHM-App **Kartenblitz** setzt diese Idee digital um.

VERTIEFUNG: TEIL-GANZES UND STRATEGIEN STATT EINZELFAKTEN

Resnick (1983) beschreibt das **Teil-Ganzes-Konzept** als entscheidenden Entwicklungsschritt im Zahlverständnis: Ein Kind erkennt, dass ein Ganzes aus Teilen besteht und dass sich daraus Beziehungen ableiten lassen. Höveler et al. (2022) betonen, dass nicht einzelne Zerlegungen als isolierte Fakten automatisiert werden sollten, sondern die **Strategien** dahinter – etwa „Wenn ein Teil um eins größer wird, wird der andere um eins kleiner“. Sie weisen zudem darauf hin, dass Zerlegen nicht dasselbe ist wie Addieren: Bei der Zerlegung ist das Ganze bekannt und die Teile werden gesucht. Diese Umkehrung des Blickes ist für Kinder anspruchsvoll und muss eigens thematisiert werden.

AUS DER FÖRDERPRAXIS

Ein Erlebnis wiederholt sich bei vielen Kindern: Nach einigen Wochen mit Punktestreifen und Schüttelbox lösen sie Aufgaben wie $6 + 7$ plötzlich mit „sechs plus sechs sind zwölf, plus eins dreizehn“. Niemand hat ihnen diesen Weg beigebracht. Sie haben ihn gefunden, weil sie die Zahlen jetzt als zusammengesetzt sehen. Genau das ist das Ziel.

Das Stellenwertsystem verstehen

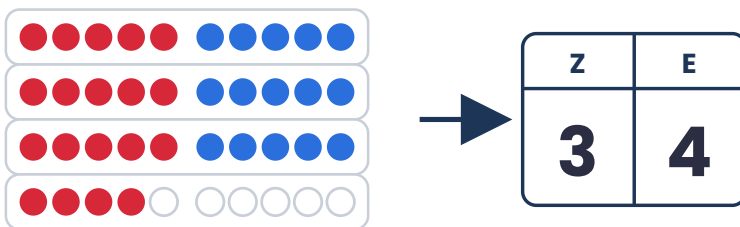
Grundvorstellung 3 in der Praxis

Das Geniale an unserem Zahlssystem ist, dass sich mit nur zehn Ziffern jede beliebige Zahl schreiben lässt. Die Menschheit hat Jahrtausende gebraucht, um dieses System zu entwickeln – Kinder sollen es in wenigen Schuljahren verstehen. Kein Wunder, dass es gerade für Kinder mit Rechenschwierigkeiten oft die größte Hürde ist.

Zwei Prinzipien müssen verstanden werden:

- **Bündelungsprinzip:** Keine Stelle kann mehr als neun aufnehmen. Sobald zehn erreicht sind, werden sie zu einem Bündel zusammengefasst, das an die nächste Stelle wandert.
- **Positionsprinzip:** Der Wert einer Ziffer hängt von ihrer Stelle ab. Die 3 in 34 bedeutet drei Zehner, in 43 drei Einer.

Beide Prinzipien sind eigenständig und müssen getrennt erarbeitet werden. Viele Routineaufgaben lassen sich lösen, ohne sie wirklich verstanden zu haben (Scherer et al. 2023).



3 volle Zehner und 4 Einzelne – geschrieben: 34

Abb. 17 Vom Bündeln zur Zahlschrift: 3 Zehner und 4 Einer ergeben 34

Eine deutsche Besonderheit: die verdrehten Zahlwörter

Im Deutschen sprechen wir zweistellige Zahlen „verkehrt herum“: Bei „vierunddreißig“ nennen wir zuerst die Einer, dann die Zehner – geschrieben wird aber zuerst die 3. Diese Inversion ist eine typische Quelle für **Zahlendreher**. Untersuchungen mit deutschsprachigen Kindern zeigen, dass solche Fehler beim Aufschreiben diktierter Zahlen häufig vorkommen und mit der Belastung des Arbeitsgedächtnisses zusammenhängen (Zuber et al. 2009). Umso wichtiger ist eine sichere Vorstellung davon, was die beiden Ziffern bedeuten. Hilfreich ist es, Zahlen zusätzlich als „drei Zehner, vier Einer“ zu sprechen.

Der Weg in fünf Schritten

1. Wirklich bündeln. Zunächst werden echte Gegenstände gebündelt: Strohhalme mit Gummiringen zu Zehnerbündeln, Bohnen in Zehnerbecher. So entsteht die Einsicht, dass zehn Einzelne zu einem neuen Ganzen werden.

2. Bündel im Hunderterfeld sehen. Eine volle Reihe ist ein Zehner. Zahlen werden im Hunderterfeld dargestellt und beschrieben: „Drei volle Reihen und vier – das sind 34.“

3. Stellenwerttafel mit gleichen Plättchen. Jetzt wird das Positionsprinzip zum Thema: Ein Plättchen in der Zehnerspalte ist so viel wert wie zehn Plättchen in der Einerspalte. Tauschspiele – zehn Einer gegen einen Zehner und zurück – machen das Bündeln und Entbündeln erfahrbar.

4. Ungewöhnliche Darstellungen. „Welche Zahl ist das: 2 Zehner und 15 Einer?“ Solche Aufgaben zeigen, ob ein Kind das Bündeln verstanden hat oder nur Ziffern abschreibt.

5. Die Null als Platzhalter. Bei 304 zeigt die Null, dass die Zehnerstelle leer ist. Ohne sie würde aus 304 die 34.

ÜBUNGEN FÜR ZU HAUSE UND IM UNTERRICHT

- **Bündelspiel „Sammelstelle“:** Reihum wird gewürfelt, die Augenzahl in Einerplättchen genommen. Wer zehn Einer hat, tauscht sie gegen einen Zehner. Wer zuerst eine bestimmte Zahl erreicht, gewinnt.
- **Zahlen mit wenigen Handgriffen legen:** 46 mit Zehnerstreifen und Einerpunkten legen. „Geht es mit weniger Handgriffen?“
- **Zahlendreher entlarven:** 34 und 43 legen und vergleichen: „Was ist gleich, was ist anders?“
- **Größer, kleiner?** Zwei Zahlen werden genannt, das Kind entscheidet ohne Material, welche größer ist, und begründet mit Zehnern und Einern.

Die EHM-Apps **Aus einer Menge Tiere wird eine Zahl** (vom Strichbild zur Zahl), **Wie aus Mengen Zahlen werden** (Hunderterfelder und Stellenwerttafel bis 1000), **Bündeln bis 100 und 1000** (ungeordnete Mengen bündeln) und **Stellenwerttafel** (Zahlen bis 9999 als Zahl, Punktfeld oder Geld) unterstützen diesen Weg.

VERTIEFUNG: DIAGNOSEAUFGABEN ZUM STELLENWERT

Ob ein Kind das Stellenwertsystem verstanden hat, zeigen Standardaufgaben wie „Schreibe 34“ kaum. Aufschlussreicher sind Aufgaben, die vom Gewohnten abweichen (Scherer & Moser Opitz 2010; Scherer et al. 2023):

- Zahlen in ungewöhnlicher Reihenfolge der Stellen: „4 Einer und 3 Zehner“.
- Nicht gebündelte Darstellungen: „1 Hunderter, 13 Zehner, 5 Einer“.
- Aufgaben zur Null: „Wie viele Zehner hat 305?“ (Antwort: 30, nicht 0).
- Die Frage nach der Bedeutung einer Ziffer: „Zeig mir mit Plättchen, was die 2 in 26 bedeutet“ (vgl. Ross 1989).

Erst verstehen, dann üben

Vom Ableiten zum Automatisieren

Verstehen allein genügt nicht. Ein Kind, das $8 + 7$ jedes Mal neu über $8 + 2 + 5$ herleiten muss, rechnet zwar nicht mehr zählend, aber immer noch langsam. Grundaufgaben wie das kleine Einpluseins und das kleine Einmaleins sollen deshalb irgendwann **automatisiert** verfügbar sein. Das entlastet das Arbeitsgedächtnis: Wer bei $47 + 38$ die Teilaufgabe $7 + 8$ einfach weiß, hat den Kopf frei für den eigentlichen Rechenweg.

Die Frage ist nicht, *ob* geübt wird, sondern *wie* und *wann*.

Ableiten als Brücke

Zwischen Verstehen und Automatisieren steht das **Ableiten**: Unbekannte Aufgaben werden aus bekannten erschlossen. Gaidoschik (2010) fand, dass Aufgaben, die Kinder in der Mitte des ersten Schuljahres ableiteten, am Ende des Schuljahres signifikant häufiger auswendig gewusst wurden. Ableiten führt also zum Automatisieren – Zählen nicht.

Wichtige Ableitungsstrategien sind:

- **Verdoppeln und Fast-Verdoppeln:** $6 + 7$ ist $6 + 6$ und eins mehr.
- **Nachbaraufgaben:** $9 + 5$ ist eins weniger als $10 + 5$.
- **Tauschaufgaben:** $2 + 9$ ist dasselbe wie $9 + 2$.
- **Über die Zehn:** $8 + 5 = 8 + 2 + 3$.
- **Analogien:** Aus $3 + 4 = 7$ folgt $13 + 4 = 17$ und $53 + 4 = 57$.

Das Einmaleins über Kernaufgaben

Beim Einmaleins gilt dasselbe Prinzip. Statt zehn Reihen stur auswendig zu lernen, werden zunächst die **Kernaufgaben** gesichert: mal 1, mal 2, mal 5 und mal 10. Alle anderen Aufgaben lassen sich daraus ableiten: $6 \cdot 7$ ist $5 \cdot 7$ plus $1 \cdot 7$, $9 \cdot 4$ ist $10 \cdot 4$ minus 4, $8 \cdot 6$ ist das Doppelte von $4 \cdot 6$ (Gaidoschik 2014). Am Hunderterfeld mit dem Malwinkel werden diese Zusammenhänge sichtbar (siehe Abbildung 6 in Kapitel 6). Die Tauschaufgaben halbieren zudem die Zahl der Aufgaben, die man wirklich lernen muss.

Produktiv üben

Üben ist nicht gleich Üben. Seitenweise „bunte Päckchen“ mit beliebig zusammengewürfelten Aufgaben fördern bei zählenden Kindern vor allem das Zählen. Wittmann und Müller (1990) haben dem das Konzept des **produktiven Übens** entgegengesetzt: Aufgaben werden so angeordnet, dass Beziehungen sichtbar werden – zum Beispiel in „schönen Päckchen“, in denen sich von Aufgabe zu Aufgabe ein Summand um eins erhöht. Kinder üben dann nicht nur das Ergebnis, sondern entdecken Muster und lernen, sie zu nutzen.

SO WIRD ÜBEN WIRKSAM

- **Kurz und täglich:** Lieber jeden Tag zehn Minuten als einmal in der Woche eine Stunde.
- **Aufgaben mit Beziehungen:** $6 + 6$, $6 + 7$, $6 + 8$... statt $3 + 9$, $7 + 5$, $2 + 6$.
- **Strategie benennen lassen:** „Welche Aufgabe hat dir geholfen?“
- **Erfolge sichtbar machen:** Eine Karte mit „Aufgaben, die ich schon weiß“, die stetig wächst.
- **Kein Zeitdruck, solange gezählt wird:** Tempo erst dann, wenn ein Kind sicher ableitet.

Automatisieren lässt sich nur, was verstanden ist.
Verstehen zuerst, dann **ableiten**, dann **üben** – in dieser Reihenfolge wird das Zählen überflüssig.

Für das Üben stehen auf erste-hilfe-mathematik.de die Apps **MatheBlitz** (adaptives Kopfrechnen: Blitzblick, Verdoppeln, Halbieren, Zerlegen, Ergänzen), **Einmaleins-Netz** und **Einmaleins üben**, **Auf Zielzahl ergänzen** sowie das druckbare **Zahlengitter** zur Verfügung.

Diagnostik

Was Rechentests leisten – und warum die eigentliche Diagnose im Gespräch mit dem Kind stattfindet.

14

Was Rechentests leisten – und was nicht

Statusdiagnostik und Prozessdiagnostik

Wenn ein Kind auffällige Schwierigkeiten im Rechnen hat, steht häufig zuerst ein Test an. Eltern lassen ihr Kind bei einer Beratungsstelle oder einem Kinder- und Jugendpsychiater testen, Schulen setzen standardisierte Verfahren ein. Am Ende steht ein Prozentrang, ein T-Wert, vielleicht eine Diagnose. Und dann? Für die eigentliche Förderarbeit, so meine Erfahrung, ist der Erkenntnisgewinn eines solchen Tests erstaunlich gering.

Das ist keine Kritik an der Qualität der Tests. Es ist eine Frage dessen, wofür sie gemacht sind.

Zwei Arten von Diagnostik

In der Fachliteratur wird zwischen zwei Formen unterschieden:

- **Statusdiagnostik** fragt: *Wo steht das Kind im Vergleich zu anderen?* Sie arbeitet mit normierten Tests, die eine Leistung mit einer großen Vergleichsgruppe in Beziehung setzen. Das Ergebnis ist eine Zahl.

- **Prozessdiagnostik** (auch förderorientierte Diagnostik) fragt: *Wie denkt das Kind? Was hat es verstanden, wo beginnt die Unsicherheit, welche Vorstellung fehlt?* Sie arbeitet mit Beobachtung, Gesprächen und gezielten Aufgaben. Das Ergebnis ist ein Bild vom Denken des Kindes.

Beide haben ihre Berechtigung. Aber nur die zweite beantwortet die Frage, die für die Förderung entscheidend ist: **Was braucht dieses Kind als Nächstes?**

Wofür normierte Tests sinnvoll sind

Bekannte Verfahren im Grundschulbereich sind etwa der DEMAT (Deutscher Mathematiktest) für die verschiedenen Klassenstufen, der Heidelberger Rechentest oder die ZAREKI-R. Die medizinische Leitlinie empfiehlt für die Diagnose einer Rechenstörung bestimmte normierte Verfahren und legt Grenzwerte fest, in der Regel einen Prozentrang von höchstens 7 (DGKJP 2018).

Solche Tests sind sinnvoll

- für ein **Screening**, um Kinder mit Unterstützungsbedarf überhaupt zu erkennen,
- für **Entscheidungen über Ressourcen**, etwa zusätzliche Förderstunden,
- für **Nachteilsausgleich** und Leistungen der Jugendhilfe, die eine formale Diagnose voraussetzen,
- für die **Evaluation** von Förderprogrammen über größere Gruppen.

Das didaktische Positionspapier von 2021 sieht standardisierte Tests genau in diesen Funktionen – und betont zugleich, dass die gewählten Grenzwerte letztlich willkürlich sind (Gaidoschik et al. 2021).

Warum Tests für die Förderung wenig verraten

Sie messen das Ergebnis, nicht den Weg. Ein Test erfasst, ob eine Aufgabe richtig gelöst wurde. Wie das Kind zum Ergebnis kam, bleibt verborgen. Erinnern wir uns an die beiden Kinder aus Kapitel 2: Kind A zählt bei $8 + 7$, Kind B rechnet über die Zehn. Im Test erhalten beide denselben Punkt.

Ein Kind mit 90 Prozent richtigen Ergebnissen, das durchgängig zählt, ist auf lange Sicht stärker gefährdet als eines mit 60 Prozent und tragfähigen Strategien – im Testergebnis erscheint es dennoch als das bessere.

Sie sagen, dass etwas fehlt, aber nicht was. Ein niedriger Prozentrang zeigt, dass ein Kind deutlich hinter seiner Altersgruppe zurückliegt. Ob das an einer fehlenden Mengenvorstellung liegt, an unsicheren Zerlegungen, an einem unverständenen Stellenwertsystem oder an einer falschen Vorstellung von der Subtraktion, lässt sich aus dem Gesamtwert kaum ablesen. Gerade das aber muss man wissen, um sinnvoll fördern zu können.

Sie sind Momentaufnahmen. Ein Test bildet einen Vormittag ab. Tagesform, Prüfungsangst und Zeitdruck spielen eine erhebliche Rolle – und Zeitdruck trifft zählende Kinder besonders.

Sie sind selten. Ein Test wird vielleicht einmal im Jahr durchgeführt. Förderung aber verändert das Denken des Kindes von Woche zu Woche. Für die Steuerung der Förderung braucht es laufende, nicht jährliche Diagnostik.

Bemerkenswert ist, dass selbst die medizinische Leitlinie fordert, die Förderung solle an den in der Diagnostik erkannten **mathematischen Problemschwerpunkten** ansetzen (DGKJP 2018). Genau diese Schwerpunkte aber erschließen sich in erster Linie durch die Analyse von Lösungswegen – nicht durch einen Prozentrang.

Ein Rechentest sagt, **dass** ein Kind Schwierigkeiten hat. Für die Förderung muss man wissen, **was** ihm fehlt und **wie** es denkt. Das zeigt nur der Blick auf den Lösungsweg.

Was stattdessen? Diagnose im Gespräch

Die Mathematikdidaktik empfiehlt für die Förderplanung eine **prozessorientierte Lernstandserhebung**, besonders in Form von **diagnostischen Interviews**, die Denk- und Lösungswege sichtbar machen

(Gaidoschik et al. 2021). Das klingt aufwendig, ist es aber nicht. Im Kern geht es um drei Dinge:

1. **Beobachten:** Wie löst das Kind die Aufgabe? Bewegen sich Finger, Lippen, Kopf? Wie lange braucht es?
2. **Nachfragen:** „Wie hast du das gemacht?“, „Kannst du es mir mit den Plättchen zeigen?“, „Geht es auch anders?“
3. **Gezielt variieren:** Aufgaben so wählen, dass sie Unterschiede sichtbar machen – zum Beispiel eine Aufgabe, die man ableiten kann, direkt nach ihrer Nachbaraufgabe.

Für Lehrkräfte gibt es inzwischen gut ausgearbeitete Materialien, etwa die diagnostischen Bausteine von KIRA und PIKAS (Götze, Selter & Zannetin 2019) oder die Materialien zur Ablösung vom zählenden Rechnen (Höveler et al. 2022). Wartha und Schulz (2012) zeigen an vielen Beispielen, wie sich typische Schwierigkeiten im Gespräch erkennen lassen.

LEITFRAGEN FÜR DIE BEOBACHTUNG

- Zählt das Kind bei Aufgaben im Zahlenraum bis 10? Bis 20?
- Erkennt es Mengen bis 10 im Punktestreifen ohne Zählen?
- Kennt es die Zerlegungen der 10 sicher?
- Nutzt es Nachbar- und Verdopplungsaufgaben?
- Kann es erklären, was die Ziffern in 34 bedeuten?
- Wie geht es mit „2 Zehner und 15 Einer“ um?
- Wie beschreibt es seinen Rechenweg?
- Was passiert, wenn das Material abgedeckt wird?

Ein ausführlicher Beobachtungsbogen findet sich im Anhang.

Jede Förderstunde ist Diagnose

Diagnose und Förderung lassen sich nicht sauber trennen. Jede Stunde mit einem Kind ist zugleich Unterstützung, Vorstellungsaufbau und Beobachtung für die nächsten Schritte. Wer genau hinsieht, merkt schnell,

ob ein Kind den Zehnerstreifen schon „sieht“ oder noch zählt, ob es eine Zerlegung weiß oder ableitet. Diese laufende Beobachtung ist das eigentliche Steuerungsinstrument der Förderung – präziser als jeder Test.

VERTIEFUNG: KOMPETENZ-, PROZESS- UND SUBJEKTORIENTIERT

Förderorientierte Diagnostik wird in der Literatur als **kompetenzorientiert** (Was kann das Kind bereits?), **prozessorientiert** (Wie geht es vor?) und **subjektorientiert** (Wie deutet es selbst die Aufgabe?) beschrieben (Höveler et al. 2022). Sie berücksichtigt neben dem Rechnen auch das Darstellen, Beschreiben und Begründen. Fehler werden dabei nicht nur gezählt, sondern als Fenster in das Denken des Kindes genutzt: Ein systematischer Fehler zeigt fast immer eine nachvollziehbare, nur eben unpassende Vorstellung.

Digitale Medien

Warum viele Mathe-Apps wenig bringen, woran man gute erkennt – und warum auch die beste App einen klaren Auftrag braucht.

15

Mathe-Apps: Spielzeug oder Werkzeug?

Kriterien für den sinnvollen Einsatz

Tablets und Smartphones sind aus dem Alltag von Kindern nicht mehr wegzudenken, und die App-Stores sind voll von Angeboten, die versprechen, Kinder spielerisch zu besseren Rechnern zu machen. Eltern greifen verständlicherweise gern zu: Das Kind übt freiwillig, es macht ihm Spaß, und es gibt Punkte und Sterne für richtige Antworten. Was kann daran falsch sein?

Viel Angebot, wenig Substanz

Die Forschung ist ernüchternd. Der australische Mathematikdidaktiker Kevin Larkin untersuchte über achtzehn Monate hinweg zahlreiche Mathe-Apps für die Grundschule. Sein Fazit: Der Großteil bietet kaum mehr als „Edutainment“; nur eine kleine Gruppe erwies sich als wirklich geeignet, mathematisches Wissen aufzubauen (Larkin 2015). Daniel Walter, der die Nutzung von Tablet-Apps durch zählend rechnende Zweitklässler untersucht hat, schätzt, dass höchstens ein Viertel der verfügbaren Apps das Verstehen fördern kann; der größere Teil arbeitet nach dem Prinzip

„Drill and Practice“ und kann im besten Fall vorhandenes Wissen automatisieren (Walter 2018). Eine Analyse der führenden Mathe-Apps im Apple App Store fand, dass korrigierendes Feedback und Direktinstruktion dominieren, während die eigentliche Verknüpfung von Lerninhalt und Spiel am seltensten gelingt (Kacmaz et al. 2021).

Warum viele Apps wenig bringen

Sie üben, was das Kind nicht verstanden hat. Die meisten Apps präsentieren Aufgaben und prüfen Ergebnisse. Für ein Kind, das zählt, heißt das: Es zählt – nur schneller. Die App kann nicht erkennen, wie das Kind zum Ergebnis kommt. Sie belohnt also auch das zählende Rechnen.

Belohnungen lenken ab. Punkte, Sterne, Pokale und Animationen sollen motivieren. Häufig lenken sie aber die Aufmerksamkeit vom Inhalt weg auf das Spiel. Es geht dann nicht mehr darum, eine Zahlbeziehung zu verstehen, sondern darum, die nächste Belohnung zu bekommen. Das erinnert an das Problem der „doppelten Repräsentation“ aus Kapitel 5: Je auffälliger die Verpackung, desto schwerer ist der Inhalt zu sehen.

Zeitdruck verstärkt das Problem. Viele Apps arbeiten mit Countdowns oder Ranglisten. Für zählende Kinder bedeutet Zeitdruck Stress – und Stress begünstigt das Zurückfallen in alte Strategien.

Die Darstellungen sind unstrukturiert. Äpfel, Sterne oder Tiere werden beliebig auf dem Bildschirm verteilt. Wie in Kapitel 6 beschrieben, kann man solche Mengen nur zählen, nicht sehen.

Raten wird belohnt. Bei Auswahlantworten führt Probieren schnell zum Ziel. Ein Kind kann viele „richtige“ Antworten sammeln, ohne etwas verstanden zu haben.

Das Wichtigste fehlt: das Gespräch. Keine App fragt: „Wie hast du das gemacht?“ Genau diese Frage ist aber, wie Teil IV gezeigt hat, das wichtigste Werkzeug der Förderung.

SCHEINERFOLGE

Drill-Apps mit Belohnungssystem können ein Problem regelrecht verdecken. Das Kind sammelt Sterne, die Trefferquote steigt, alle sind zufrieden – und dabei zählt es immer schneller und sicherer. Erst im Zahlenraum über 20 bricht das Kartenhaus dann zusammen.

Auch gute Apps sind kein Selbstläufer

Es gibt sie aber, die guten Apps. Dazu gehören vor allem **virtuelle Arbeitsmittel** wie ein digitales Zwanziger- oder Hunderterfeld, die strukturierte Darstellungen bieten und das Kind selbst handeln lassen. Doch auch hier ist Vorsicht vor zu großen Erwartungen geboten. Walter (2018) zeigte, dass zählende Kinder ein virtuelles Zwanzigerfeld keineswegs automatisch anders nutzen als ein gewöhnliches – auch dort wurde gezählt. Ob das Potenzial einer App ausgeschöpft wird, hängt entscheidend von der **Aufgabenstellung** ab und davon, ob Lehrkräfte oder Eltern mögliche Nutzungsweisen vorhersehen und mit passenden Impulsen begleiten. Digitale Angebote brauchen zudem Erfahrungen in der analogen Welt: Das Umdrehen eines echten Wendeplättchens lässt sich durch ein Antippen auf dem Bildschirm nicht vollständig ersetzen (Walter 2018).

Günter Krauthausen hat dafür den Grundsatz vom „**Primat der Didaktik**“ geprägt: Nicht die Technik bestimmt den Unterricht, sondern der Inhalt und das Lernziel. Digitale Medien sind eine Option unter vielen; sie sollen eingesetzt werden, wo sie einen echten Mehrwert bieten, und sie ersetzen nicht die fachliche Kompetenz der Lehrkraft (Krauthausen 2012).

Eine gute App ist ein **Werkzeug**. Wie jedes Werkzeug nützt sie nur, wenn man weiß, **was** damit gemacht werden soll – und **warum**.

Eine Checkliste für Eltern und Lehrkräfte

Bevor Sie eine App einsetzen, lohnt sich ein kritischer Blick:

Frage	Gutes Zeichen	Warnzeichen
Wie werden Mengen dargestellt?	Strukturiert, mit Fünfer- und Zehnergliederung	Beliebig verteilte Bilder
Kann man zählen, um zum Ziel zu kommen?	Kurze Darbietung, Blitzblick	Unbegrenzte Zeit zum Abzählen
Worauf zielt die App?	Verstehen, Beziehungen, Strategien	Nur Ergebnisse, nur Tempo
Wie wird motiviert?	Durch Erfolgserlebnisse beim Können	Durch Punkte, Pokale, Ranglisten
Wie reagiert die App auf Fehler?	Hilfen, die zum Nachdenken anregen	Nur „falsch“ und nächste Aufgabe
Passt sich die App an?	Tempo und Schwierigkeit wachsen mit dem Kind	Starre Level, Zeitdruck
Gibt es einen Auftrag?	Klar, welche Vorstellung geübt wird	Unklar, „irgendwas mit Mathe“

Die EHM-Apps: mit klarem Auftrag

Aus genau diesen Überlegungen habe ich für *erste-hilfe-mathematik.de* eigene Lernapps entwickelt. Sie sind kostenlos und laufen im Browser. Vor allem aber hat jede von ihnen einen klar umrissenen Auftrag, der einer der drei Grundvorstellungen oder dem anschließenden Üben zugeordnet ist:

App	Bereich	Was das Kind dabei tun soll
Punktfeld – Zahlenfeld – Blitzblick	Mengen	Strukturierte Mengen darstellen und ohne Zählen erkennen
Zeig es mit Händen und Fingern	Mengen	Eine kurz gezeigte Menge mit den eigenen Fingern darstellen
Hagelkörner (Spiel)	Mengen	Fallende Mengen blitzartig erfassen
Zahlen mit Punktstreifen zerlegen	Zerlegungen	Den Zehnerstreifen „zerschneiden“ und Zerlegungen finden

App	Bereich	Was das Kind dabei tun soll
Kugeln in der Box	Zerlegungen	Den fehlenden, verdeckten Teil bestimmen
Mengenpuzzle	Zerlegungen	Zu Zielzahl und vorhandenem Teil die passende Ergänzungsmenge finden
Ergebniszahl sucht Plusaufgaben	Zerlegungen	Alle Plusaufgaben zu einer Ergebniszahl finden und untereinander sammeln
Kartenblitz	Zerlegungen	Schnell zwei Zahlen finden, die eine Zielzahl ergeben
Aus einer Menge Tiere wird eine Zahl	Stellenwert	Vom Strichbild zur Zahl: warum wir bündeln
Wie aus Mengen Zahlen werden	Stellenwert	Mengen bis 1000 in Hunderterfeldern und der Stellenwerttafel
Bündeln bis 100 und 1000	Stellenwert	Ungeordnete Mengen zu Zehnern und Hundertern bündeln
Stellenwerttafel	Stellenwert	Zahlen bis 9999 als Zahl, Punktefeld oder Geld darstellen
Einmaleins-Netz, Einmaleins üben	Üben	Einmaleins über Kernaufgaben verstehen und sichern
MatheBlitz	Üben	Kopfrechnen, das sich dem Tempo des Kindes anpasst
Auf Zielzahl ergänzen, Kopfrechengitter	Üben	Ergänzen und Kopfrechnen in vielfältigen Varianten

Auch für diese Apps gilt jedoch, was oben gesagt wurde: Sie ersetzen nicht das Gespräch. Ihren Nutzen entfalten sie, wenn ein Erwachsener weiß, welche Vorstellung damit aufgebaut werden soll, wenn er zwischendurch nachfragt, wie das Kind vorgeht – und wenn analoge Übungen mit Punktestreifen, Fingerbildern und Plättchen weiterlaufen.

SO SETZEN SIE APPS SINNVOLL EIN

- **Kurz:** 5 bis 10 Minuten genügen.
- **Begleitet:** Zumindest anfangs dabeisitzen und fragen: „Wie hast du das gesehen?“
- **Gezielt:** Die App wählen, die zu dem Bereich passt, in dem das Kind gerade arbeitet.
- **Im Wechsel:** Digitale und analoge Übungen ergänzen sich.
- **Beobachten:** Zählt das Kind auch in der App? Dann zurück zur Mengenvorstellung.

Gemeinsam handeln

Was Eltern, Lehrkräfte und Schulen tun können – früh, abgestimmt und mit langem Atem.

16

Eltern und Schule an einem Strang

Frühe Hilfe, Förderkonzept und die täglichen fünfzehn Minuten

Kinder mit Rechenschwierigkeiten brauchen Hilfe von mehreren Seiten: einen Unterricht, der Grundvorstellungen aufbaut, gezielte Förderung, wo sie nötig ist, und ein Elternhaus, das unterstützt, ohne zu überfordern. Am besten gelingt das, wenn alle dasselbe Ziel verfolgen und mit denselben Bildern arbeiten.

Früh beginnen – schon vor der Schule

Der Anfang mathematischen Lernens liegt nicht im ersten Schuljahr, sondern im Elternhaus und in der Kita. Kinder, die dort spielerisch Erfahrungen mit Mengen und Fingerbildern sammeln, kommen mit besseren Voraussetzungen in die Schule. Das didaktische Positionspapier sieht in früher mathematischer Bildung deshalb eine wichtige Form der Vorbeugung (Gaidoschik et al. 2021).

FÜR KITA UND ELTERNHAUS

- Fingerbilder spielerisch zeigen: „Zeig mir drei! Zeig mir fünf! Zeig mir sechs!“
- Beim Tischdecken, Aufräumen und Einkaufen Anzahlen benennen und vergleichen.
- Dinge in Fünfer- oder Zehnergruppen ordnen: Knöpfe, Steine, Kastanien.

Frühe Hilfe in der Schule

Fällt in den ersten Monaten der ersten Klasse auf, dass ein Kind kaum Alternativen zum Zählen entwickelt, sollten Eltern und Lehrkraft spätestens nach Weihnachten oder zum Halbjahr gemeinsam überlegen, wie es unterstützt werden kann. Länder wie Finnland, Estland oder Japan zeigen, dass frühe und systematische Unterstützung möglich ist – mit derselben Mathematik, die auch bei uns unterrichtet wird.

Wichtig ist dabei die Haltung: Förderung ist keine Sache einer einzelnen Zusatzstunde, in der niemand genau weiß, was eigentlich gefördert wird. Sie ist **Aufgabe des gesamten Unterrichts** – ergänzt durch eine Zusatzförderung, wo sie nötig ist.

Bausteine eines schulischen Förderkonzepts

Aus den vorangegangenen Kapiteln lassen sich einige Grundsätze ableiten, die sich in Schulen bewährt haben:

1. **Eine Leitdarstellung für die ganze Schule:** Das strukturierte Punktefeld mit Fünfer- und Zehnergliederung wird von Klasse 1 an durchgängig genutzt – im Regelunterricht wie in der Förderung.
2. **Ablösung vom zählenden Rechnen** ist das vorrangige Förderziel in den Jahrgangsstufen 1 bis 4.
3. **Diagnostik im Gespräch:** Jeder Förderentscheidung geht die Beobachtung des Lösungswegs voraus. Tests dienen dem Screening, nicht der Förderplanung.

4. **Materialabbau wird geplant:** Jede Fördereinheit enthält einen Anteil, in dem ohne Material, nur mit der Vorstellung, gearbeitet wird.
5. **Material wird aussortiert:** Vorhandene Bestände werden nach der Leitfrage „Zählen oder Sehen?“ gesichtet.
6. **Digitale Angebote werden geprüft:** strukturierte Darstellungen, Sehen statt Zählen, kein Tempo-Drill.
7. **Eltern werden einbezogen:** mit kurzen, klaren Hinweisen, was zu Hause hilft – und was nicht.

Was Eltern tun können

Eltern sind oft verunsichert. Sie möchten helfen, wissen aber nicht wie – und manche Hilfe, die gut gemeint ist, verstärkt das Problem eher. Die folgenden Hinweise haben sich bewährt.

DAS HilFT

- **Kurz und regelmäßig:** nicht viel länger als 15 Minuten am Tag, möglichst mit Freude und ohne Druck.
- **Nach dem Weg fragen:** „Wie hast du das herausgefunden?“ statt nur „Richtig!“ oder „Falsch!“
- **Wenig Material, immer dasselbe:** Punktestreifen und Fingerbilder genügen lange.
- **Vorstellen statt hinsehen:** „Mach die Augen zu – wie sieht die 8 auf dem Streifen aus?“
- **Erfolge sichtbar machen:** Was das Kind schon kann, wird festgehalten und gewürdigt.
- **Mit der Lehrkraft sprechen:** früh, offen und mit dem Ziel, gemeinsam zu planen.
- **Geduld haben:** Kinder lernen unterschiedlich schnell – in der Schule wie beim Laufen- und Sprechenlernen.

DAS LIEBER LASSEN

- **Seitenweise Päckchen rechnen lassen:** Mehr vom Gleichen verfestigt das Zählen.
- **Fingerzählen verbieten:** Das Kind braucht eine Alternative, kein Verbot.
- **Lange erklären:** Kinder verstehen durch Tun, nicht durch Vorträge.
- **Lose Plättchen- oder Steinchenhaufen zum Rechnen geben:** Sie laden zum Zählen ein.
- **Auf Tempo drängen,** solange das Kind noch zählt.
- **Teure Programme kaufen,** die nicht mit Zahlen, Mengen und Rechenwegen arbeiten.

Die emotionale Seite

Kinder mit Rechenschwierigkeiten erleben oft über Jahre, dass sie etwas nicht können, was anderen leichtfällt. Viele entwickeln Angst vor Mathematik, manche halten sich für „dumm“. Diese Erfahrungen wiegen schwer und können das Lernen zusätzlich blockieren. Die stärkste Gegenkraft ist das Erleben von Können: Ein Kind, das zum ersten Mal die 7 „sieht“, ohne zu zählen, oder eine Aufgabe über die Zehn löst, erfährt, dass es Mathematik verstehen kann. Solche Erfahrungen sind wertvoller als jedes Lob und jeder Stern in einer App.

Für Eltern heißt das: Fehler nicht dramatisieren, Wege würdigen, kleine Fortschritte bemerken. Und: Das eigene Verhältnis zur Mathematik nicht auf das Kind übertragen. Ein Satz wie „Ich war auch nie gut in Mathe“ ist gut gemeint, entlastet aber nicht – er bestätigt dem Kind nur, dass es nichts tun kann.

Zum Schluss

Dieses Buch ist aus der Überzeugung entstanden, dass fast alle Kinder rechnen lernen können. Manche brauchen dafür mehr Zeit als andere. Viele brauchen einen anderen Weg als den, den sie bisher gegangen sind. Und alle brauchen Erwachsene, die verstehen, worum es eigentlich geht.

Es geht nicht darum, mehr zu rechnen. Es geht darum, dass im Kopf des Kindes **Vorstellungen** entstehen: von Mengen, die man sehen kann, von Zahlen, die aus anderen Zahlen bestehen, und von einem Stellenwertsystem, in dem der Ort einer Ziffer ihren Wert bestimmt. Wenige, gut strukturierte Arbeitsmittel helfen dabei mehr als volle Regale. Das genaue Hinsehen auf den Lösungsweg verrät mehr als jeder Test. Und eine App ist nur so gut wie der Auftrag, den man ihr gibt.

Nicht das Kind muss mehr rechnen – die Förderung muss ihm ermöglichen, Mengen und Zahlen zu **sehen**, statt sie zu zählen.

Ich habe in meiner Arbeit immer wieder erlebt, wie Kinder, die jahrelang an der Mathematik verzweifelt waren, plötzlich Freude daran fanden. Dieser Moment, in dem ein Kind merkt „Ich kann das ja!“, ist der eigentliche Lohn aller Mühe. Ich wünsche allen Leserinnen und Lesern, dass sie ihn oft erleben.

Wer Fragen hat oder Unterstützung sucht, findet auf *erste-hilfe-mathematik.de* weitere Informationen, Fördermaterial und die Lernapps – und einen Weg, mit mir Kontakt aufzunehmen.

Anhang

Beobachtungsbogen, App-Übersicht und Literatur



Beobachtungsbogen „Zählt das Kind noch?“

Zur Beobachtung im Gespräch – kein Test

Der Bogen soll helfen, die Beobachtungen aus Kapitel 14 zu ordnen. Er ersetzt keine genaue Analyse, gibt aber einen schnellen Überblick, in welchem der drei Bereiche ein Kind Unterstützung braucht. Wichtig ist immer die Frage nach dem **Wie**: Das Kind soll zeigen und erzählen, wie es vorgeht.

Beobachtung	sicher	teilweise	noch nicht
Mengenvorstellung			
Erkennt Mengen bis 10 im Punktestreifen (Blitzblick)	☐	☐	☐
Begründet: „Ich habe 5 und 3 gesehen“	☐	☐	☐
Zeigt Zahlen bis 10 als Fingerbild auf einen Griff	☐	☐	☐
Erkennt Mengen bis 20 im Zwanzigerfeld	☐	☐	☐

Beobachtung	sicher	teilweise	noch nicht
Kann sich Punktestreifen ohne Material vorstellen	☐	☐	☐
Zahlzerlegungen			
Kennt alle Zerlegungen der 10 ohne Zählen	☐	☐	☐
Ergänzt sicher bis 10 („Was fehlt?“)	☐	☐	☐
Kennt Verdopplungsaufgaben bis $10 + 10$	☐	☐	☐
Nutzt Nachbaraufgaben ($6 + 7$ über $6 + 6$)	☐	☐	☐
Rechnet über die Zehn ($8 + 5 = 8 + 2 + 3$)	☐	☐	☐
Stellenwertverständnis			
Bündelt 10 Einer zu einem Zehner	☐	☐	☐
Erklärt, was die Ziffern in 34 bedeuten	☐	☐	☐
Löst „2 Zehner und 15 Einer“	☐	☐	☐
Schreibt diktierter Zahlen ohne Zahlendreher	☐	☐	☐
Weiß, wie viele Zehner 305 hat	☐	☐	☐
Rechenweg allgemein			
Löst Aufgaben bis 20 ohne (verstecktes) Zählen	☐	☐	☐
Beschreibt den eigenen Rechenweg verständlich	☐	☐	☐
Findet zu einer Aufgabe einen zweiten Lösungsweg	☐	☐	☐



Die EHM-Apps im Überblick

Kostenlos auf erste-hilfe-mathematik.de

Alle Apps laufen kostenlos im Internetbrowser. Am besten eignen sich **Tablets aller Art**: Dort lassen sich die Apps bequem mit dem Finger bedienen. Auch am **PC oder Laptop** funktionieren sie; ohne Touchscreen übernehmen dann Maus und Tastatur die Eingabe. **Smartphones** sind dagegen leider nicht sinnvoll – der Bildschirm ist zu klein, um Punktefelder und Mengen gut erkennen zu können.

Jede App hat ihren eigenen QR-Code. Scannen Sie ihn am besten direkt mit der Kamera des Tablets, dann öffnet sich die App sofort dort, wo das Kind mit ihr arbeitet. Am PC finden Sie alle Apps über das Menü auf *erste-hilfe-mathematik.de*. Die App „Zeig es mit Händen und Fingern“ braucht einen Touchscreen, weil sie die aufgelegten Finger erkennt; sie ist deshalb nur für Tablets gedacht.

MENGENVORSTELLUNG



Punktefeld – Zahlenfeld – Blitzblick

Strukturierte Mengen bis 100 darstellen und im Blitzblick ohne Zählen erkennen.



Hagelkörner (Spiel)

Mengen bis 10 oder 20 in Fünferbündelung schnell erkennen, bevor sie landen.



Zeig es mit Händen und Fingern

Mengen oder Ergebnisse kleiner Aufgaben mit den eigenen Fingern auf dem Tablet zeigen.

ZAHLZERLEGUNGEN



Zahlen mit Punktstreifen zerlegen

Den Zehnerstreifen teilen und alle Zerlegungen einer Zahl finden.



Kugeln in der Box

Zahlen bis 20 zerlegen: den fehlenden, verdeckten Teil bestimmen.



Mengenpuzzle

Zu Zielzahl und vorhandener Menge die passende Ergänzungskarte finden.



Ergebniszahl sucht Plusaufgaben

Möglichst alle Plusaufgaben zu einer Ergebniszahl bis 25 finden – mit Zahlen oder Punkten.



Kartenblitz

Möglichst schnell zwei Karten finden, die zusammen die Zielzahl ergeben.

STELLENWERTVERSTÄNDNIS



Aus einer Menge Tiere wird eine Zahl

Vom Tier über Strichbilder und Fünferbündel zur geschriebenen Zahl.



Wie aus Mengen Zahlen werden

Mengen bis 1000 in Hunderterfeldern und der Stellenwerttafel.



Bündeln bis 100 und 1000

Ungeordnete Mengen zu Zehnern und Hundertern bündeln.



Stellenwerttafel

Zahlen in der Tafel T/H/Z/E einstellen und als Zahl, Punktefeld oder Geld betrachten.

ÜBEN



Einmaleins-Netz

Das Einmaleins über Kernaufgaben verstehen und vernetzen.



Einmaleins üben, üben, üben

Das kleine Einmaleins sicher automatisieren.



MatheBlitz

Kopfrechnen, das sich dem Tempo des Kindes anpasst.



Auf Zielzahl ergänzen

Ergänzen bis zu einer Zielzahl trainieren.



Kopfrechengitter

Ein Zahlengitter – viele Aufgaben; druckbar.



Literatur

Alle im Text zitierten Quellen

- Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 14–18, 46–47.
- BMBSFJ – Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend (2026). *PISA 2025 zeigt deutlich: Basiskompetenzen stärken, Bildungschancen verbessern*. Pressemitteilung vom 8. September 2026.
- Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400.
- Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179–202.
- Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, 5(7), 400–405.
- DGKJP – Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie (2018). *S3-Leitlinie Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung* (AWMF-Registernummer 028-046). Koordination: G. Schulte-Körne & S. Haberstroh.
- Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. London: Hutchinson.
- Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y. & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26(1), 9–25.
- Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt a. M.: Peter Lang.
- Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten*. Seelze: Kallmeyer.

- Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 111S (Sonderheft).
- Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Liu, F. & Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development*, 67(5), 2022–2044.
- Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Freiburg: Pädagogische Hochschule.
- Götze, D., Selter, C. & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Seelze: Kallmeyer.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.
- Höveler, K., Tilke, F., Maiß, L., Mense, S., Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2022). *Ablösung vom zählenden Rechnen*. Reihe „Diagnose und Förderung von Verstehensgrundlagen“. Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM). maco.dzlm.de
- Kacmaz, G., Alam, S., Wen, R., Eyyi, R. & Dubé, A. K. (2021). An evaluation of math applications in the App Store: Do they contain benchmarks of educational quality? *TMS Proceedings 2021*.
- Kamii, C. & Joseph, L. (1988). Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic Teacher*, 35(6), 48–52.
- Kamii, C. (1986). Place value: An explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal of Research in Childhood Education*, 1(2), 75–86.
- Kaminski, J. A. & Sloutsky, V. M. (2013). Extraneous perceptual information interferes with children's acquisition of mathematical knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 351–363.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320(5875), 454–455.
- Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkman, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62(4), 498–525.
- Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19(6), 513–526.
- Krauthausen, G. (1995). Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 87–108). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

- Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). „Ist das dann noch ein Zehner oder ist das dann ein Einer?“ – Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 699–702). Münster: WTM.
- Larkin, K. (2015). „An App! An App! My Kingdom for an App“: An 18-month quest to determine whether apps support mathematical knowledge building. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls*. Dordrecht: Springer.
- Lewalter, D., Diedrich, J., Goldhammer, F., Köller, O. & Reiss, K. (Hrsg.) (2023). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland*. Münster: Waxmann.
- Lorenz, J. H. (1992). *Anschaung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.
- Mahiko (2019). *Zehner- und Zwanzigerfeld – Material einsetzen*. Mathe inklusiv mit PIKAS / DZLM. mahiko.dzlm.de
- McNeil, N. M. & Fyfe, E. R. (2012). „Concreteness fading“ promotes transfer of mathematical knowledge. *Learning and Instruction*, 22(6), 440–448.
- Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49.
- Obersteiner, A., Reiss, K. & Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction*, 23, 125–135.
- OECD (2026). *PISA 2025 Results*. Paris: OECD Publishing.
- Picht, G. (1964). *Die deutsche Bildungskatastrophe. Analyse und Dokumentation*. Olten, Freiburg i. Br.: Walter.
- PIKAS (2012). *Welche Darstellungsmittel auswählen? Sachinformation zu Haus 3: Umgang mit Rechenschwierigkeiten*. pikas.dzlm.de
- Resnick, L. B. & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 3, pp. 41–95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109–151). New York: Academic Press.
- Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 47–51.

- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum.
- Scherer, P., Rolka, K., Bertram, J. & da Costa Silva, N. (2023). *Stellenwertverständnis – Steckbrief*. DZLM. maco.dzlm.de
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.
- Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern. Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.
- Stanat, P., Schipolowski, S., Gentrup, S., Sachse, K. A., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg.) (2025). *IQB-Bildungstrend 2024. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der 9. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Münster: Waxmann.
- Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg.) (2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Münster: Waxmann.
- Starkey, G. S. & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 126, 120–137.
- Thompson, P. W. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teacher*, 41(9), 556–558.
- Uttal, D. H. & DeLoache, J. S. (2006). Learning from symbolic objects. *APS Observer*, 19(5).
- Uttal, D. H., Scudder, K. V. & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37–54.
- Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2009). *Das Zahlenbuch*. Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. Ch. (1993). „Weniger ist mehr“: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1993*. Hildesheim: Franzbecker.

Zuber, J., Pixner, S., Moeller, K. & Nuerk, H.-C. (2009). On the language specificity of basic number processing: Transcoding in a language with inversion and its relation to working memory capacity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(1), 60–77.

Über den Autor

Roland Dauth war 30 Jahre lang Seminarrektor und Leiter der Ausbildung von Grundschullehrkräften in Wunsiedel und Bayreuth, davor Klassenleiter an Grund- und Hauptschulen in Ober- und Unterfranken. In Oberfranken war er mitverantwortlich für das Programm „SINUS an Grundschulen“. Heute fördert er Kinder mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen, entwickelt kostenlose Lernapps und berät Eltern und Schulen über *erste-hilfe-mathematik.de*.



ÜBER DIESES BUCH

Viele Kinder, die mit dem Rechnen kämpfen, haben dasselbe Problem: Sie zählen, statt zu rechnen. Dieses Buch zeigt, warum das so ist und wie man es ändern kann – mit drei Grundvorstellungen, wenigen gut gewählten Arbeitsmitteln und viel Geduld.

Es erklärt, warum strukturierte Punktefelder dem verbreiteten Dienes-Material überlegen sind, warum Rechentests für die Förderung wenig verraten und warum auch gute Lern-Apps nur wirken, wenn klar ist, was mit ihnen erreicht werden soll.

Nicht das Kind muss mehr rechnen – die Förderung muss ihm ermöglichen, Mengen und Zahlen zu **sehen**, statt sie zu zählen.

Roland Dauth leitete 30 Jahre lang die Ausbildung von Grundschullehrkräften in Wunsiedel und Bayreuth. Heute fördert er Kinder mit Rechenschwierigkeiten und entwickelt kostenlose Lernapps.



erste-hilfe-mathematik.de

Informationen, Fördermaterial und kostenlose Lernapps