

Warum Kinder trotz Mathematikunterricht am Rechnen scheitern können

Rechnen können ist nicht dasselbe wie Mathematik verstehen.

„Ein Kind kann gelernt haben, wie man eine Aufgabe löst, ohne eine tragfähige Vorstellung davon entwickelt zu haben, warum es funktioniert.“

Ein Grundsatzartikel von Erste-Hilfe-Mathematik.de

Wenn Kinder rechnen können – aber Mathematik nicht wirklich verstehen

Viele Eltern kennen eine irritierende Situation: Ihr Kind hat eine Rechenart in der Schule gelernt, Arbeitsblätter bearbeitet und mit Anschauungsmaterial gearbeitet. Gestern konnte es die Aufgaben noch lösen – und heute weiß es bei einer etwas anders gestellten Aufgabe plötzlich nicht mehr weiter.

Es zählt an den Fingern, probiert irgendein Verfahren oder fragt: „Wie muss ich das rechnen?“

Der Schlüssel kann darin liegen, dass das Kind gelernt hat, etwas zu tun – ohne eine tragfähige mathematische Vorstellung aufzubauen.

Deutschlands Kinder haben ein Mathematikproblem

Die großen Leistungsvergleiche zeigen seit etwa 2012 einen deutlichen Rückgang. Bei PISA 2022 erreichten die 15-Jährigen in Deutschland in Mathematik durchschnittlich 475 Punkte; 2012 waren es 514. Rund 30 Prozent gehörten 2022 zur Gruppe der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler.

Auch in der Grundschule ist die Lage besorgniserregend: Im IQB-Bildungstrend 2021 erreichten rund 22 Prozent der Viertklässler den Mindeststandard in Mathematik nicht.

Etwa jedes fünfte Kind verlässt die Grundschule mit Defiziten in grundlegenden mathematischen Bereichen.

Natürlich hat diese Entwicklung viele Ursachen: Lehrkräftemangel, Unterrichtsausfall, zunehmende Heterogenität, unterschiedliche sprachliche und soziale Voraussetzungen sowie die Folgen der Pandemie. Trotzdem sollte auch gefragt werden, wie wir Kindern Mathematik vermitteln.

Mathematik findet nicht auf dem Arbeitsblatt statt

Nehmen wir eine scheinbar einfache Aufgabe:

$$8 + 7 = 15$$

Kind A zählt:

$$9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15$$

Kind B nutzt Beziehungen:

$$8 + 2 = 10$$

$$10 + 5 = 15$$

Beide Ergebnisse sind richtig. Der mathematische Denkprozess ist es nicht. Kind A bleibt von der Zahlwortreihe abhängig. Kind B nutzt Beziehungen zwischen Zahlen.

Die wichtigste Frage lautet nicht nur: „Kann das Kind die Aufgabe rechnen?“ – sondern: „Was geschieht dabei in der Vorstellung des Kindes?“

Grundvorstellungen: das Fundament

Ein Kind muss Vorstellungen davon entwickeln, was Zahlen bedeuten, wie Mengen strukturiert sind, wie Zahlen zerlegt und zusammengesetzt werden können, was Rechenoperationen bedeuten und wie und warum unser Stellenwertsystem funktioniert.

In der Mathematikdidaktik spricht man von Grundvorstellungen. Sie bilden das Fundament für die Grundrechenarten in der Grundschule, aber auch für spätere Rechenverfahren, Brüche, Prozentrechnung, Gleichungen usw.

Anschauung ist wichtig – aber Material allein erzeugt noch kein Verständnis

Gerade Kindern mit Rechenschwierigkeiten gibt man verständlicherweise Anschauungsmaterial: Plättchen, Kugeln, Würfel, Zehnerstangen oder Hunderterplatten. Das kann hilfreich sein.

Dass ein Kind etwas mit den Händen tut, bedeutet noch lange nicht, dass im Kopf die gewünschte mathematische Vorstellung entsteht.

Material ist kein Lernziel. Es ist ein Hilfsmittel auf dem Weg zu einer inneren Vorstellung. Ein gutes Anschauungsmittel sollte sich deshalb irgendwann selbst überflüssig machen.

HANDLUNG



BILD



VORSTELLUNG



SYMBOL

Der Darstellungswechsel ist kein Selbstzweck. Er muss zu einer stabilen mathematischen Vorstellung führen.

Ein interessantes Beispiel: die Dienes-Blöcke

Kaum ein Anschauungsmittel zum Stellenwertsystem ist so verbreitet wie die sogenannten Mehrsystemblöcke, häufig Dienes-Material oder Zehnersystem-Material genannt. Einerwürfel, Zehnerstange, Hunderterplatte und Tausenderwürfel zeigen Bündelungs- und Größenverhältnisse sehr anschaulich.

Aber gerade deshalb lohnt sich eine kritische Frage: Zeigt dieses Material wirklich das entscheidende Prinzip unserer Zahlschrift?

Dienes-Material:

Der Gegenstand verändert seine Größe.
Einer → Stange → Platte

Zahlschrift:

Das Zeichen bleibt gleich.
3 Hunderter | 3 Zehner | 3 Einer

Im Stellenwertsystem bestimmt allein die Position einer Ziffer ihren Wert.

Bei 333 verwenden wir dreimal exakt dasselbe Zeichen. Trotzdem bedeutet es $300 + 30 + 3$. Nicht die Größe eines Gegenstandes, nicht seine Farbe und nicht seine Form bestimmen den Wert – sondern die Stelle.

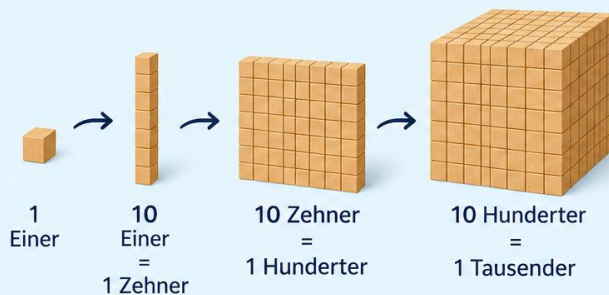
Das Dienes-Material ist deshalb nicht grundsätzlich „schlecht“. Für Bündelung und Größenrelationen kann es sehr anschaulich sein. Aber das eigentliche Positionsprinzip der Zahlschrift muss zusätzlich bewusst thematisiert und verstanden werden.

Zwei Darstellungen – zwei verschiedene Botschaften

Beide sind hilfreich – aber sie zeigen unterschiedliche Aspekte unseres Stellenwertsystems.

Dienes-Material (Mehrsystemblöcke)

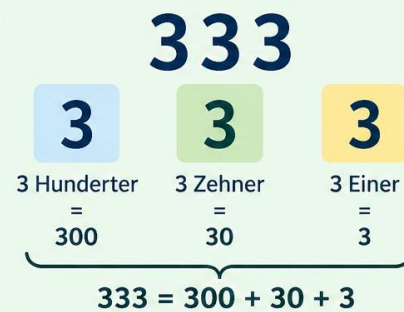
Es zeigt Bündelung und Größenverhältnisse.



Der Gegenstand verändert sich.
Mit jeder Stelle wird das **Material größer**.

Zahlschrift im Stellenwertsystem

Es zeigt das entscheidende Positionsprinzip.



Das Zeichen bleibt gleich –
allein die **Position bestimmt den Wert**.



Beide Darstellungen sind nützlich – aber sie zeigen nicht dasselbe.

Das Dienes-Material veranschaulicht sehr gut, dass nach zehn gebündelt wird. Das entscheidende Prinzip unseres Stellenwertsystems – dass dieselbe Ziffer je nach Stelle einen anderen Wert hat – muss jedoch zusätzlich bewusst thematisiert und verstanden werden.

Nicht das größere Material macht die Zahl größer – sondern ihre Stelle in der Zahlschrift.

Dienes-Material und Zahlschrift: zwei Darstellungen – zwei unterschiedliche Botschaften.

Warum heißen sie eigentlich Mehrsystemblöcke?

Zoltán Dienes entwickelte seine „Multibase Arithmetic Blocks“ für die Arbeit mit unterschiedlichen Zahlensystemen. Kinder sollten nicht nur das Zehnersystem, sondern auch andere Basen untersuchen und dadurch die allgemeine Struktur von Stellenwertsystemen entdecken.

Heute werden die Blöcke überwiegend für das Dezimalsystem und teilweise in der Förderung rechenschwacher Kinder eingesetzt. Deshalb ist die Frage berechtigt, ob ein historisch für einen breiteren Zweck entwickeltes Material automatisch für jedes heutige Lernziel optimal geeignet ist.

Bekanntes Material ist nicht automatisch passendes Material

Bei Anschauungsmitteln sollte nicht nur gefragt werden: „Ist es anschaulich?“ Entscheidend ist vielmehr: „Ist es mathematisch kohärent mit genau der Vorstellung, die im Kopf des Kindes entstehen soll?“

Nicht möglichst viel Material – sondern möglichst klares, konsistentes und zum Lernziel passendes Material.

Verstehen und Automatisieren gehören zusammen

Aus der berechtigten Kritik an stumpfem Auswendiglernen darf nicht folgen, dass Üben und Automatisieren unwichtig seien. Ein Kind sollte grundlegende Zahlbeziehungen wie $5 + 5$, $7 + 3$ oder $8 + 2$ irgendwann sicher verfügbar haben.

Denn das Arbeitsgedächtnis ist begrenzt. Wer bei $47 + 38$ noch elementare Teilaufgaben abzählen muss, verbraucht seine geistige Kapazität bereits für die einfachsten Schritte.

VERSTEHEN → SINNVOLL ÜBEN → AUTOMATISIEREN

Warum kleine Lücken später große Folgen haben

Mathematik ist stark hierarchisch aufgebaut. Neues Wissen setzt häufig älteres Wissen voraus. Deshalb können kleine Unsicherheiten am Anfang Jahre später große Auswirkungen haben.

Fehlende strukturierte Mengenvorstellung



Zählendes Rechnen



Unsichere Zahlzerlegungen



Schwaches Stellenwertverständnis



Rechenverfahren werden als Regeln gelernt



Probleme mit Multiplikation und Division



Brüche ohne tragfähige Vorstellung



Schwierigkeiten mit Prozentrechnung



Algebra als Manipulation bedeutungsloser Zeichen

Deshalb reicht „mehr üben“ bei Rechenschwäche häufig nicht

Ein Kind kann $52 - 38$ nicht sicher berechnen. Die naheliegende Reaktion ist oft: zehn weitere Aufgaben derselben Art. Aber vielleicht liegt das Problem gar nicht bei dieser konkreten Aufgabe.

Vielleicht kann das Kind Zahlen nicht sicher zerlegen. Vielleicht rechnet es noch zählend. Vielleicht besitzt es keine sichere Zehner-Einer-Vorstellung oder keine tragfähige Vorstellung von Subtraktion.

Dann braucht das Kind nicht einfach mehr Aufgaben. Es braucht zunächst die richtige Vorstellung.

Förderung muss eine andere Frage stellen

Vom Fehler zur Ursache

Nicht nur:
„Was hat das Kind falsch gemacht?“

Sondern:
„Was fehlt in der Vorstellung des Kindes,
damit es die Aufgabe verstehen kann?“

Das verändert Förderung grundlegend. Wir suchen nicht zuerst nach einem neuen „Rechentrick“, sondern nach der fehlenden mathematischen Vorstellung.

Der Ansatz bei Erste-Hilfe-Mathematik

Erste-Hilfe-Mathematik möchte Kindern nicht möglichst viele Verfahren beibringen und sie auch nicht einfach immer mehr von den Aufgaben rechnen lassen, die ihnen ohnehin Schwierigkeiten bereiten.

Man sollte sich als Lehrer/Innen und Eltern fragen: Was hat das Kind bereits verstanden? Wo beginnt die Unsicherheit? Welche Vorstellung fehlt? Welche mathematische Struktur muss sichtbar werden? Wie kann daraus ein Bild im Kopf entstehen? Und wie kann das Verstandene anschließend so geübt werden, dass es sicher verfügbar ist?

Das eigentliche Ziel ist, dass ein Kind ohne Arbeitsblatt, ohne Material und ohne fremde Hilfe mathematisch denken kann.

Unser Grundsatz

Kinder scheitern selten daran, dass sie zu wenige Rechenverfahren kennengelernt haben.

Sie scheitern häufig daran, dass hinter Zahlen, Rechenzeichen und Verfahren keine ausreichend tragfähigen Vorstellungen entstanden sind.

Nachhaltiges Mathematiklernen beginnt nicht mit einem Arbeitsblatt.

Es beginnt mit einer Vorstellung im Kopf des Kindes.

Fachliche Hinweise und Quellen

Die im Artikel genannten Leistungsdaten und didaktischen Grundgedanken stützen sich unter anderem auf folgende Quellen:

PISA 2022 – Ergebnisse für Deutschland – Technische Universität München / OECD. Mathematikleistungen deutscher 15-Jähriger, Entwicklung seit 2012 und Anteil leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler.

IQB-Bildungstrend 2021 – Primarstufe – Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen. Erreichen der Mindest- und Regelstandards in Mathematik am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

Ständige Wissenschaftliche Kommission der KMK – Gutachten „Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern“. Bedeutung grundlegender mathematischer Kompetenzen und ihrer systematischen Förderung.

PIKAS / DZLM – Fachdidaktische Materialien zu Zahlverständnis, Stellenwertverständnis, Grundvorstellungen und zur Vernetzung von Darstellungen.

Science Museum Group Collection – Historische Dokumentation zu Zoltán Dienes' „Multibase Arithmetic Blocks“ und ihrem Einsatz mit unterschiedlichen Zahlbasen.

Hinweis: Der Artikel unterscheidet bewusst zwischen empirisch belegten Leistungsentwicklungen und daraus abgeleiteten fachdidaktischen Bewertungen. Er behauptet nicht, dass einzelne Unterrichtsmethoden oder Materialien den Leistungsrückgang kausal verursacht hätten.